

IX Открытая осенняя студенческая олимпиада ФКН по математике
OSAM Comp 2026

13 сентября 2026, 11:00 – 14:00 мск

I категория (I курс бакалавриата)

1. Функция f обладает свойством: для каждого действительного числа x из её области определения число $\frac{1}{x}$ также лежит в её области определения, и

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x.$$

Какое наибольшее множество действительных чисел может быть областью определения f ?

2. Пусть n и k — положительные целые числа, такие что $k \leq n$. Сколькими способами можно выбрать k целочисленных интервалов в множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ так, чтобы пересечение любых двух из них было пустым?

Примечание: *целочисленный интервал* — это множество из одного или нескольких последовательных целых чисел.

3. Пусть $a, b > 0$. Определим эллипсы

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}, \quad \mathcal{E}_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4 \right\}.$$

Дана точка A на $\mathcal{E}_2$. Пусть B и C — различные точки на $\mathcal{E}_2$ такие, что прямые AB и AC касаются $\mathcal{E}_1$. Докажите, что BC также касается $\mathcal{E}_1$ и что площадь треугольника ABC не зависит от выбора точки A .

4. Пусть p — простое число. Обозначим

$$A = \{a^2 \bmod p : a \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{b^4 \bmod p : b \in \mathbb{Z}\}.$$

При каких p выполнено $A + B = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, то есть каждый вычет по модулю p представим как сумма квадрата и четвёртой степени?

5. Пусть $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ — многочлен такой, что

$$\deg p \leq 2018 \quad \text{и} \quad |p(x)| \leq \frac{1}{|x - \sqrt{3}|} \quad \text{для всех } x \in [-2, 2] \setminus \{\sqrt{3}\}.$$

Докажите, что

$$|p(\sqrt{3})| \leq 2019.$$