

**IX Открытая осенняя студенческая олимпиада ФКН по математике
OSAM Comp 2026**

13 сентября 2026, 11:00 – 14:00 мск

Категория II+ (II курс бакалавриата и старше)

1. Пусть a и b — действительные числа, такие что $a < b$ и $ab > 0$. Пусть $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ — непрерывная функция. Докажите, что существует действительное число $x \in [a, b]$, для которого $xf(x) = ab$.
2. Существует ли непостоянный многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами такой, что для каждого положительного целого n число $P(n)$ является некоторым членом последовательности Фибоначчи?

Примечание. Последовательность Фибоначчи $\{F_1, F_2, \dots\}$ определяется равенствами $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ при $n \geq 1$.

3. Пусть A_0 — обратимая вещественная симметричная $d \times d$ матрица. Определим последовательность

$$A_{n+1} = \frac{1}{2} (A_n + A_n^{-1}), \quad n \geq 0.$$

Докажите, что все A_n корректно определены и исследуйте, обязательно ли эта матричная последовательность сходится.

4. Пусть V — вещественное векторное пространство размерности не меньше 3, зафиксируем ненулевой вектор $u \in V$, и пусть $A: V \rightarrow V$ — линейный оператор. Предположим, что $A(x) \in \text{span}\{x, u\}$ для каждого $x \in V$. Докажите, что существуют скаляр λ и линейный функционал φ на V такие, что

$$A(x) = \lambda x + \varphi(x)u.$$

5. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_k$ — различные целые числа, причём $\sum_{i=1}^k a_i = n$, а g — перестановка

$$g = (1, 2, \dots, a_1)(a_1 + 1, a_1 + 2, \dots, a_1 + a_2) \cdots \\ \cdot (a_1 + \cdots + a_{k-1} + 1, \dots, n).$$

Докажите, что централизатор g в Sym_n , симметрической группе на n элементах, является абелевой группой.

Напоминание: централизатор g в Sym_n — подгруппа перестановок из Sym_n , которые коммутируют с g .