

О рангах $(0, 1)$ -матриц

М.Н. Вялый

19.09.2026

Научная школа МЛ ТИ

Напоминания – 1: стандартный ранг

Рассматриваем матрицы над полем $\mathbb{R}$, $M_{m,n}$ — матрицы размера $m \times n$. Пусть $A \in M_{m,n}$. Стандартный ранг $\text{rk } A$ — это размерность образа отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, задаваемого $x \mapsto Ax$.

Напоминания – 1: стандартный ранг

Рассматриваем матрицы над полем $\mathbb{R}$, $M_{m,n}$ — матрицы размера $m \times n$. Пусть $A \in M_{m,n}$. Стандартный ранг $\text{rk } A$ — это размерность образа отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, задаваемого $x \mapsto Ax$.

Равносильные определения:

1. Ранг — наибольшее количество линейно независимых столбцов матрицы.

Напоминания – 1: стандартный ранг

Рассматриваем матрицы над полем $\mathbb{R}$, $M_{m,n}$ — матрицы размера $m \times n$. Пусть $A \in M_{m,n}$. Стандартный ранг $\text{rk } A$ — это размерность образа отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, задаваемого $x \mapsto Ax$.

Равносильные определения:

1. Ранг — наибольшее количество линейно независимых столбцов матрицы.
2. $\text{rk } A$ равен наименьшему r , для которого существуют такие $B \in M_{m,r}$, $C \in M_{r,n}$, что $A = BC$.

Напоминания – 1: стандартный ранг

Рассматриваем матрицы над полем $\mathbb{R}$, $M_{m,n}$ — матрицы размера $m \times n$. Пусть $A \in M_{m,n}$. Стандартный ранг $\text{rk } A$ — это размерность образа отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, задаваемого $x \mapsto Ax$.

Равносильные определения:

1. Ранг — наибольшее количество линейно независимых столбцов матрицы.
2. $\text{rk } A$ равен наименьшему r , для которого существуют такие $B \in M_{m,r}$, $C \in M_{r,n}$, что $A = BC$.
3. $\text{rk } A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r X_k$, $\text{rk } X_k = 1$.

Матрицы малого ранга:

1. Матрица ранга 0 единственная: это нулевая матрица.

Матрицы малого ранга:

1. Матрица ранга 0 единственная: это нулевая матрица.
2. Матрицы ранга 1 имеют вид xy^T , где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.
Другими словами, $A_{ij} = x_i y_j$.

Матрицы малого ранга:

1. Матрица ранга 0 единственная: это нулевая матрица.
2. Матрицы ранга 1 имеют вид xy^T , где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.
Другими словами, $A_{ij} = x_i y_j$.

Свойства ранга:

1. $\text{rk}(A + B) \leq \text{rk } A + \text{rk } B$.

Матрицы малого ранга:

1. Матрица ранга 0 единственная: это нулевая матрица.
2. Матрицы ранга 1 имеют вид xy^T , где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$.
Другими словами, $A_{ij} = x_i y_j$.

Свойства ранга:

1. $\text{rk}(A + B) \leq \text{rk } A + \text{rk } B$.
2. $\text{rk } A = \text{rk } A^T$.

Неотрицательный ранг

Пусть $A \geq 0$ — неотрицательная матрица. Тогда $\text{rk}_+ A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r X_k$, $\text{rk } X_k = 1$ и $X_k \geq 0$.

Неотрицательный ранг

Пусть $A \geq 0$ — неотрицательная матрица. Тогда $\text{rk}_+ A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение

$$A = \sum_{k=1}^r X_k, \text{rk } X_k = 1 \text{ и } X_k \geq 0.$$

Очевидное неравенство $\text{rk } A \leq \text{rk}_+ A$.

Неотрицательный ранг

Пусть $A \geq 0$ — неотрицательная матрица. Тогда $\text{rk}_+ A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение

$$A = \sum_{k=1}^r X_k, \text{rk } X_k = 1 \text{ и } X_k \geq 0.$$

Очевидное неравенство $\text{rk } A \leq \text{rk}_+ A$.

Есть ли ограничение в другую сторону?

То есть, выполняется ли для некоторой функции f и всех неотрицательных матриц A неравенство $\text{rk}_+ A \leq f(\text{rk } A)$?

В другую сторону ограничения нет

Пример (LeRoy B. Beasley, Thomas J. Laffey; 2009)

Для $n \geq 3$ выберем n различных целых чисел $a_1, \dots, a_n$ и определим матрицу порядка n как

$$Q(a_1, \dots, a_n)_{i,j} = (a_i - a_j)^2.$$

В другую сторону ограничения нет

Пример (LeRoy B. Beasley, Thomas J. Laffey; 2009)

Для $n \geq 3$ выберем n различных целых чисел $a_1, \dots, a_n$ и определим матрицу порядка n как

$$Q(a_1, \dots, a_n)_{i,j} = (a_i - a_j)^2.$$

Для этой матрицы $\text{rk } Q(a_1, \dots, a_n) = 3$ и $\text{rk}_+ Q(a_1, \dots, a_n) = \Omega(\log n)$.

Стандартный ранг $Q(a_1, \dots, a_n)$

Многочлены $(x - a_1)^2, (x - a_2)^2, (x - a_3)^2$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 2.

Стандартный ранг $Q(a_1, \dots, a_n)$

Многочлены $(x - a_1)^2$, $(x - a_2)^2$, $(x - a_3)^2$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 2.

Поэтому размерность линейной оболочки столбцов матрицы $Q(a_1, \dots, a_n)$ равна 3.

К нижней оценке неотрицательного ранга $Q(a_1, \dots, a_n)$

Пусть $\text{rk } X = 1$, $X \geq 0$. Положительные элементы X образуют подматрицу $A_{I,J}$, $I \subseteq [m]$, $J \subseteq [n]$. Множество $I \times J$ назовём **боксом** (комбинаторным прямоугольником).

К нижней оценке неотрицательного ранга $Q(a_1, \dots, a_n)$

Пусть $\text{rk } X = 1$, $X \geq 0$. Положительные элементы X образуют подматрицу $A_{I,J}$, $I \subseteq [m]$, $J \subseteq [n]$. Множество $I \times J$ назовём **боксом** (комбинаторным прямоугольником).

Для $A \geq 0$ неотрицательный ранг не меньше **числа покрытия** $\chi(A)$ — минимального количества боксов, которыми можно покрыть положительные элементы A так, чтобы ни один нулевой элемент не покрыт.

$$\chi(A) \leq \text{rk}_+ A.$$

Ранг больше числа покрытия

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk } A = 3 > \chi(A) = 2$$

Единицы A покрываются двумя матрицами порядка 2.

Стандартный ранг и число покрытия несравнимы

Ранг больше числа покрытия

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rk } A = 3 > \chi(A) = 2$$

Единицы A покрываются двумя матрицами порядка 2.

Ранг меньше числа покрытия

$$\text{rk } Q(a_1, \dots, a_n) < \chi(Q(a_1, \dots, a_n)) = \Omega(\log n)$$

Последнюю оценку нужно ещё доказать.

Из неё же следует $\text{rk}_+ A = \Omega(\log n)$

$$\chi(Q(a_1, \dots, a_n)) = \Omega(\log n)$$

Рассмотрим боксы $I_1 \times J_1, I_2 \times J_2, \dots, I_k \times J_k$, которые покрывают все положительные элементы матрицы $\chi(Q(a_1, \dots, a_n))$ и не покрывают ни одного нулевого элемента.

$$\chi(Q(a_1, \dots, a_n)) = \Omega(\log n)$$

Рассмотрим боксы $I_1 \times J_1, I_2 \times J_2, \dots, I_k \times J_k$, которые покрывают все положительные элементы матрицы $\chi(Q(a_1, \dots, a_n))$ и не покрывают ни одного нулевого элемента.

Предположим, что $2^{2k} < n$. Тогда два каких-то числа $i \neq j$ лежат в одной ячейке диаграммы Венна, образованной множествами $I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k$, то есть оба эти числа входят в одно и то же семейство этих множеств.

$$\chi(Q(a_1, \dots, a_n)) = \Omega(\log n)$$

Рассмотрим боксы $I_1 \times J_1, I_2 \times J_2, \dots, I_k \times J_k$, которые покрывают все положительные элементы матрицы $\chi(Q(a_1, \dots, a_n))$ и не покрывают ни одного нулевого элемента.

Предположим, что $2^{2k} < n$. Тогда два каких-то числа $i \neq j$ лежат в одной ячейке диаграммы Венна, образованной множествами $I_1, \dots, I_k, J_1, \dots, J_k$, то есть оба эти числа входят в одно и то же семейство этих множеств.

Это означает, что элементы подматрицы $Q(a_1, \dots, a_n)_{\{i,j\}, \{i,j\}}$ либо все покрыты, либо все непокрыты. Но в этой подматрице есть и нулевые, и положительные элементы (нулевые элементы — это в точности главная диагональ). Значит, такое семейство множеств не образует покрытие. Поэтому $k \geq \frac{1}{2} \log_2 n$.

Для $(0, 1)$ -матриц $\text{rk}_+ A \leq 2^{\text{rk} A}$ (начало)

Пусть все элементы A принадлежат $\{0, 1\}$. Обозначим $r = \text{rk} A$.

У матрицы A не более 2^r различных столбцов

Возьмём невырожденную подматрицу $A_{I,J}$ порядка r .

Различных столбцов в подматрице $A_{I,[n]}$ не более 2^r (это двоичные слова длины r).

Для $(0, 1)$ -матриц $\text{rk}_+ A \leq 2^{\text{rk } A}$ (начало)

Пусть все элементы A принадлежат $\{0, 1\}$. Обозначим $r = \text{rk } A$.

У матрицы A не более 2^r различных столбцов

Возьмём невырожденную подматрицу $A_{I,J}$ порядка r .

Различных столбцов в подматрице $A_{I,[n]}$ не более 2^r (это двоичные слова длины r).

Каждый столбец $A_{I,[n]}$ однозначно разлагается в линейную комбинацию столбцов из $A_{I,J}$. Точно в ту же линейную комбинацию разлагаются и столбцы матрицы A по столбцам из $A_{[m],J}$. Поэтому и в A не более 2^r столбцов.

Для $(0, 1)$ -матриц $\text{rk}_+ A \leq 2^{\text{rk} A}$ (окончание)

Построение неотрицательного разложения

Одинаковые столбцы группируются в матрицу ранга 1.

Обозначим множество индексов столбцов, равных x , через S .

Тогда эти столбцы образуют подматрицу вида $x\mathbb{1}_S^T$ ($\mathbb{1}_S$ — индикаторная функция S).

Для $(0, 1)$ -матриц $\text{rk}_+ A \leq 2^{\text{rk } A}$ (окончание)

Построение неотрицательного разложения

Одинаковые столбцы группируются в матрицу ранга 1.

Обозначим множество индексов столбцов, равных x , через S .

Тогда эти столбцы образуют подматрицу вида $x \mathbb{1}_S^T$ ($\mathbb{1}_S$ — индикаторная функция S).

Получаем разложение A в сумму не более чем 2^r матриц ранга 1 с элементами 0, 1.

Для $(0, 1)$ -матриц $\text{rk}_+ A \leq 2^{\text{rk} A}$ (окончание)

Построение неотрицательного разложения

Одинаковые столбцы группируются в матрицу ранга 1.

Обозначим множество индексов столбцов, равных x , через S .

Тогда эти столбцы образуют подматрицу вида $x \mathbb{1}_S^T$ ($\mathbb{1}_S$ — индикаторная функция S).

Получаем разложение A в сумму не более чем 2^r матриц ранга 1 с элементами 0, 1.

Усиление оценки (А. Kotlov, L. Lovász; 1996)

Верхнюю оценку на количество различных столбцов в $(0, 1)$ -матрице A можно усилить до $O(2^{\text{rk} A/2})$.

Для $(0, 1)$ -матриц $\text{rk}_+ A \leq 2^{\text{rk } A}$ (окончание)

Построение неотрицательного разложения

Одинаковые столбцы группируются в матрицу ранга 1.

Обозначим множество индексов столбцов, равных x , через S .

Тогда эти столбцы образуют подматрицу вида $x \mathbb{1}_S^T$ ($\mathbb{1}_S$ — индикаторная функция S).

Получаем разложение A в сумму не более чем 2^r матриц ранга 1 с элементами 0, 1.

Усиление оценки (А. Kotlov, L. Lovász; 1996)

Верхнюю оценку на количество различных столбцов в $(0, 1)$ -матрице A можно усилить до $O(2^{\text{rk } A/2})$.

Но лучше не бывает: есть примеры $(0, 1)$ -матриц, в которых $\Omega(2^{\text{rk } A/2})$ различных столбцов.

Открытый вопрос: насколько точна предыдущая оценка?

Вариант log-rank conjecture (Lovász, Saks; 1988)

Существует такая константа c , что для любой $(0, 1)$ -матрицы A выполняется $\log \text{rk}_+ A = O(\log^c \text{rk } A)$.

Открытый вопрос: насколько точна предыдущая оценка?

Вариант log-rank conjecture (Lovász, Saks; 1988)

Существует такая константа c , что для любой $(0, 1)$ -матрицы A выполняется $\log \text{rk}_+ A = O(\log^c \text{rk} A)$.

Основной вариант этой гипотезы относится к связи между стандартным рангом и **коммуникационной сложностью** $(0, 1)$ -матрицы A . Доказательство равносильности двух формулировок неочевидно. В качестве хорошего вводного чтения об этой гипотезе советую

Troy Lee and Adi Shraibman. Around the log-rank conjecture. Israel Journal of Mathematics, 256(2):441-477, 2023

и/или

S. Jukna. Boolean function complexity. Springer, 2012.

Двоичный ранг

Для $(0, 1)$ -матрицы A двоичный ранг $\text{rk}_{0,1} A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r X_k$, $\text{rk } X_k = 1$ и X_k — $(0, 1)$ -матрица.

Из определений и предыдущего доказательства следуют неравенства

$$\text{rk } A \leq \text{rk}_+ A \leq \text{rk}_{0,1} A \leq 2^{\text{rk } A}.$$

Двоичный ранг

Для $(0, 1)$ -матрицы A двоичный ранг $\text{rk}_{0,1} A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r X_k$, $\text{rk } X_k = 1$ и X_k — $(0, 1)$ -матрица.

Из определений и предыдущего доказательства следуют неравенства

$$\text{rk } A \leq \text{rk}_+ A \leq \text{rk}_{0,1} A \leq 2^{\text{rk } A}.$$

Теорема LS (Lovász, Saks; 1993)

Для любой $(0, 1)$ -матрицы A выполняется

$$\log_2 \text{rk}_{0,1} A \leq 3 \log_2 \text{rk}_+ A \cdot (\log_2 \text{rk } A + 1) = O(\log^2 \text{rk}_+ A).$$

Двоичный ранг

Для $(0, 1)$ -матрицы A двоичный ранг $\text{rk}_{0,1} A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r X_k$, $\text{rk } X_k = 1$ и X_k — $(0, 1)$ -матрица.

Из определений и предыдущего доказательства следуют неравенства

$$\text{rk } A \leq \text{rk}_+ A \leq \text{rk}_{0,1} A \leq 2^{\text{rk } A}.$$

Теорема LS (Lovász, Saks; 1993)

Для любой $(0, 1)$ -матрицы A выполняется

$$\log_2 \text{rk}_{0,1} A \leq 3 \log_2 \text{rk}_+ A \cdot (\log_2 \text{rk } A + 1) = O(\log^2 \text{rk}_+ A).$$

Lovász, Saks доказали более точную оценку

$$\log_2 \text{rk}_{0,1} A \leq (\log_2 \text{rk}_+ A + 2) \cdot (\log_2 \text{rk} A + 1)$$

Они использовали в доказательстве коммуникационную сложность. Далее будет рассказано доказательство, основанное на их идее, но без употребления коммуникационной сложности. В итоге оценка несколько ухудшается.

Теорема LS (Lovász, Saks; 1993)

Для любой $(0, 1)$ -матрицы A выполняется

$$\log_2 \text{rk}_{0,1} A \leq 3 \log_2 \text{rk}_+ A \cdot (\log_2 \text{rk} A + 1) = O(\log^2 \text{rk}_+ A).$$

Двоичный ранг

Для $(0, 1)$ -матрицы A двоичный ранг $\text{rk}_{0,1} A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r X_k$, $\text{rk } X_k = 1$ и X_k — $(0, 1)$ -матрица.

Из определений и предыдущего доказательства следуют неравенства

$$\text{rk } A \leq \text{rk}_+ A \leq \text{rk}_{0,1} A \leq 2^{\text{rk } A}.$$

Теорема LS (Lovász, Saks; 1993)

Для любой $(0, 1)$ -матрицы A выполняется

$$\log_2 \text{rk}_{0,1} A \leq 3 \log_2 \text{rk}_+ A \cdot (\log_2 \text{rk } A + 1) = O(\log^2 \text{rk}_+ A).$$

С точки зрения log-rank conjecture, неотрицательный и двоичный ранги «примерно одинаковы».

Доказательство теоремы LS (начало)

Так как $\chi(A) \leq \text{rk}_+ A$ достаточно для любой $(0, 1)$ -матрицы A доказать неравенство

$$\log_2 \text{rk}_{0,1} A \leq 3 \log_2 \chi(A) \cdot (\log_2 \text{rk} A + 1),$$

равносильное

$$\text{rk}_{0,1} A \leq (\chi(A))^{3(\log_2 \text{rk} A + 1)}.$$

Доказательство индукцией по $\text{rk} A$.

База индукции. $\text{rk} A = 1$. Легко проверить, что тогда $A = \mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T$, то есть единицы A образуют бокс $I \times J$. Поэтому $\chi(A) = 1$, $\text{rk}_{0,1} A = 1$ и неравенство выполняется: $1 \leq 1^3 = 1$.

Шаг индукции ($r = \operatorname{rk} A \geq 2$, $s = \chi(A) \geq 2$)

Из покрытия единиц s боксами выберем какой-нибудь, $I \times J$.

Обозначим $A' = A_{[m] \setminus I, J}$, $A'' = A_{I, [n] \setminus J}$.

	A'	
I	$\mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T$	A''
	J	

Шаг индукции ($r = \text{rk } A \geq 2$, $s = \chi(A) \geq 2$)

Из покрытия единиц s боксами выберем какой-нибудь, $I \times J$.

Обозначим $A' = A_{[m] \setminus I, J}$, $A'' = A_{I, [n] \setminus J}$.

	A'	
I	$\mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T$	A''
	J	

Утверждение: $\text{rk } A' + \text{rk } A'' \leq r + 1$.

Шаг индукции ($r = \text{rk } A \geq 2$, $s = \chi(A) \geq 2$)

Из покрытия единиц s боксами выберем какой-нибудь, $I \times J$.

Обозначим $A' = A_{[m] \setminus I, J}$, $A'' = A_{I, [n] \setminus J}$.

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A' & \\ \hline \mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T & A'' \\ \hline \end{array}$$

$$A - \mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T = \begin{array}{|c|c|} \hline A' & \\ \hline 0 & A'' \\ \hline \end{array}$$

Утверждение: $\text{rk } A' + \text{rk } A'' \leq r + 1$.

Доказательство:

$$\text{rk } A' + \text{rk } A'' \leq \text{rk}(A - \mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T) \leq r + \text{rk}(-\mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T) = r + 1.$$

Шаг индукции ($r = \text{rk } A \geq 2$, $s = \chi(A) \geq 2$)

Из покрытия единиц s боксами выберем какой-нибудь, $I \times J$.

Обозначим $A' = A_{[m] \setminus I, J}$, $A'' = A_{I, [n] \setminus J}$.

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline A' & \\ \hline \mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T & A'' \\ \hline \end{array}$$

$$A - \mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T = \begin{array}{|c|c|} \hline A' & \\ \hline 0 & A'' \\ \hline \end{array}$$

Утверждение: $\text{rk } A' + \text{rk } A'' \leq r + 1$.

Доказательство:

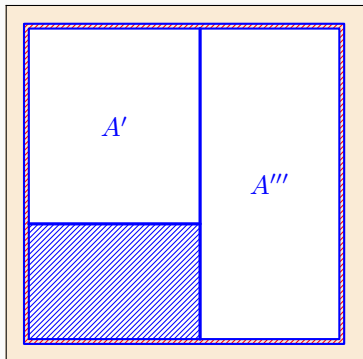
$$\text{rk } A' + \text{rk } A'' \leq \text{rk}(A - \mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T) \leq r + \text{rk}(-\mathbb{1}_I \mathbb{1}_J^T) = r + 1.$$

Поэтому $\text{rk } A' \leq (r + 1)/2$ или $\text{rk } A'' \leq (r + 1)/2$. Оба случая анализируются одинаково с точностью до транспонирования. Считаем далее, что $\text{rk } A' \leq (r + 1)/2$.

Шаг индукции (продолжение, $r = \text{rk } A \geq 2$, $s = \chi(A) \geq 2$)

Обозначим $A''' = A_{[m], n \setminus J}$. Тогда

$$\text{rk}_{0,1} A \leq 1 + \text{rk}_{0,1} A' + \text{rk}_{0,1} A'''.$$

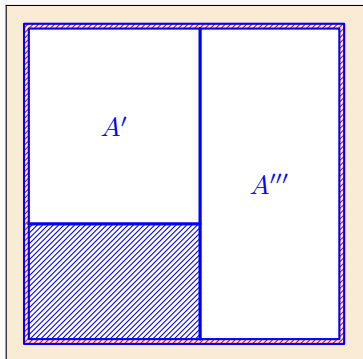


Шаг индукции (продолжение, $r = \operatorname{rk} A \geq 2$, $s = \chi(A) \geq 2$)

Обозначим $A''' = A_{[m], n \setminus J}$. Тогда

$$\operatorname{rk}_{0,1} A \leq 1 + \operatorname{rk}_{0,1} A' + \operatorname{rk}_{0,1} A'''.$$

Заметим, что $\chi(A') \leq \chi(A) - 1$, $\chi(A''') \leq \chi(A) - 1$.



Шаг индукции (продолжение, $r = \text{rk } A \geq 2$, $s = \chi(A) \geq 2$)

Обозначим $A''' = A_{[m], n \setminus J}$. Тогда

$$\text{rk}_{0,1} A \leq 1 + \text{rk}_{0,1} A' + \text{rk}_{0,1} A'''.$$

Заметим, что $\chi(A') \leq \chi(A) - 1$, $\chi(A''') \leq \chi(A) - 1$. Применяя аналогичное преобразование к A''' и индуктивное предположение, получаем

$$\begin{aligned} \text{rk}_{0,1} A &\leq \\ &\leq \underbrace{(1 + (s-1)^{3 \log_2(r+1)}) + (1 + (s-2)^{3 \log_2(r+1)}) + \dots + (1 + 0)}_{s \text{ боксов}} \\ &\leq s + s(s-1)^{3 \log_2(r+1)}. \end{aligned}$$

Шаг индукции (продолжение, $r = \text{rk } A \geq 2$, $s = \chi(A) \geq 2$)

Обозначим $A''' = A_{[m], n \setminus J}$. Тогда

$$\text{rk}_{0,1} A \leq 1 + \text{rk}_{0,1} A' + \text{rk}_{0,1} A'''.$$

Заметим, что $\chi(A') \leq \chi(A) - 1$, $\chi(A''') \leq \chi(A) - 1$. Применяя аналогичное преобразование к A''' и индуктивное предположение, получаем

$$\begin{aligned} \text{rk}_{0,1} A &\leq \\ &\leq \underbrace{(1 + (s-1)^{3 \log_2(r+1)}) + (1 + (s-2)^{3 \log_2(r+1)}) + \dots + (1 + 0)}_{s \text{ боксов}} \\ &\leq s + s(s-1)^{3 \log_2(r+1)}. \end{aligned}$$

Осталось при $r \geq 2$, $s \geq 2$ доказать неравенство

$$s + s(s-1)^{3 \log_2(r+1)} \leq s^{3(\log_2 r + 1)}.$$

Доказательство неравенства $s + s(s - 1)^{3 \log_2(r+1)} \leq s^{3(\log_2 r + 1)}$

1. При указанных параметрах равносильно

$$1 + (s - 1)^{3 \log_2(r+1)} \leq s^{3 \log_2 r + 2}.$$

Доказательство неравенства $s + s(s - 1)^{3 \log_2(r+1)} \leq s^{3(\log_2 r + 1)}$

1. При указанных параметрах равносильно $1 + (s - 1)^{3 \log_2(r+1)} \leq s^{3 \log_2 r + 2}$.
2. Заметим, что $\log_2 3/2 \leq 2/3$. При $r \geq 2$ получаем $\log_2(1 + 1/r) \leq 2/3$, откуда $3 \log_2(r + 1) \leq 3 \log_2 r + 2$.

Доказательство неравенства $s + s(s - 1)^{3 \log_2(r+1)} \leq s^{3(\log_2 r + 1)}$

1. При указанных параметрах равносильно $1 + (s - 1)^{3 \log_2(r+1)} \leq s^{3 \log_2 r + 2}$.
2. Заметим, что $\log_2 3/2 \leq 2/3$. При $r \geq 2$ получаем $\log_2(1 + 1/r) \leq 2/3$, откуда $3 \log_2(r + 1) \leq 3 \log_2 r + 2$.
3. Поэтому достаточно доказать $1 + (s - 1)^a \leq s^a$ при $s \geq 2$ и $a \geq 5$.

Доказательство неравенства $s + s(s - 1)^{3 \log_2(r+1)} \leq s^{3(\log_2 r + 1)}$

1. При указанных параметрах равносильно $1 + (s - 1)^{3 \log_2(r+1)} \leq s^{3 \log_2 r + 2}$.
2. Заметим, что $\log_2 3/2 \leq 2/3$. При $r \geq 2$ получаем $\log_2(1 + 1/r) \leq 2/3$, откуда $3 \log_2(r + 1) \leq 3 \log_2 r + 2$.
3. Поэтому достаточно доказать $1 + (s - 1)^a \leq s^a$ при $s \geq 2$ и $a \geq 5$.
4. При $a \geq 5$ функция x^a выпуклая, так что $x^a - (x - 1)^a \geq a(x - 1)^{a-1} \geq 1$ при $a \geq 5, x \geq 2$.

Чем больше возможных значений матричных элементов в матрицах ранга 1, допустимых в разложении матрицы A , тем ближе минимальный размер разложения к $\text{rk } A$.

Чем больше возможных значений матричных элементов в матрицах ранга 1, допустимых в разложении матрицы A , тем ближе минимальный размер разложения к $\text{rk } A$.

Эта сходимость оказывается радикально быстрой!

Троичный ранг

Чем больше возможных значений матричных элементов в матрицах ранга 1, допустимых в разложении матрицы A , тем ближе минимальный размер разложения к $\text{rk } A$.

Эта сходимость оказывается радикально быстрой!

Для $(0, 1)$ -матрицы A троичный ранг $\text{rk}_{0,\pm 1} A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r X_k$, $\text{rk } X_k = 1$ и X_k — матрица, элементы которой принадлежат множеству $\{-1, 0, +1\}$.

Троичный ранг

Чем больше возможных значений матричных элементов в матрицах ранга 1, допустимых в разложении матрицы A , тем ближе минимальный размер разложения к $\text{rk } A$.

Эта сходимость оказывается радикально быстрой!

Для $(0, 1)$ -матрицы A троичный ранг $\text{rk}_{0,\pm 1} A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r X_k$, $\text{rk } X_k = 1$ и X_k — матрица, элементы которой принадлежат множеству $\{-1, 0, +1\}$.

Теорема HLS (Hambardzumyan, Lovett, Shirley; 2025)

Для любой $(0, 1)$ -матрицы A выполняется $\text{rk}_{0,\pm 1} A = O(\text{rk } A \cdot \log \text{rk } A)$.

Троичный ранг

В масштабе log-rank conjecture двоичный ранг близок к неотрицательному, а троичный — к стандартному.

Эта сходимость оказывается радикально быстрой!

Для $(0, 1)$ -матрицы A троичный ранг $\text{rk}_{0,\pm 1} A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r X_k$, $\text{rk } X_k = 1$ и X_k — матрица, элементы которой принадлежат множеству $\{-1, 0, +1\}$.

Теорема HLS (Hambardzumyan, Lovett, Shirley; 2025)

Для любой $(0, 1)$ -матрицы A выполняется $\text{rk}_{0,\pm 1} A = O(\text{rk } A \cdot \log \text{rk } A)$.

Ещё один ранг...

Знаковый двоичный ранг $\text{rs } A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r \varepsilon_k X_k$, $\text{rk } X_k = 1$, X_k — $(0, 1)$ -матрица, а $\varepsilon_k \in \{-1, +1\}$.

Ещё один ранг...

Знаковый двоичный ранг $rs A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r \varepsilon_k X_k$, $rk X_k = 1$, X_k — $(0, 1)$ -матрица, а $\varepsilon_k \in \{-1, +1\}$.

Из определения сразу следует $rk_{0,\pm 1} A \leqslant rs A$. Поэтому достаточно оценить сверху $rs A$.

Ещё один ранг...

Знаковый двоичный ранг $\text{rs } A$ равен наименьшему r , для которого существует разложение $A = \sum_{k=1}^r \varepsilon_k X_k$, $\text{rk } X_k = 1$, X_k — $(0, 1)$ -матрица, а $\varepsilon_k \in \{-1, +1\}$.

Из определения сразу следует $\text{rk}_{0,\pm 1} A \leq \text{rs } A$. Поэтому достаточно оценить сверху $\text{rs } A$.

Замечание: неравенство $\text{rs } A \leq 4 \text{rk}_{0,\pm 1} A$

легко выводится из представления $(\pm 1, 0)$ -матрицы ранга 1 в виде xy^T , где x, y — $(\pm 1, 0)$ -векторы.

Суммы столбцов, независимые множества столбцов

$A(S) = A\mathbb{1}_S$ — сумма столбцов матрицы A по множеству столбцов S .

Множество столбцов S назовём **независимым**, если $A(S') \neq A(S'')$ для любых $S' \neq S''$, $S' \subseteq S$, $S'' \subseteq S$.

Суммы столбцов, независимые множества столбцов

$A(S) = A\mathbb{1}_S$ — сумма столбцов матрицы A по множеству столбцов S .

Множество столбцов S назовём **независимым**, если $A(S') \neq A(S'')$ для любых $S' \neq S''$, $S' \subseteq S$, $S'' \subseteq S$.

Лемма 1.

Если S — независимое множество столбцов $(0, 1)$ -матрицы A , то $|S| = O(\text{rk } A \cdot \log \text{rk } A)$.

Доказательство леммы 1

Составим матрицу $\tilde{A}$ из всех сумм столбцов независимого множества S . В $\tilde{A}$ все столбцы различны по определению.

Доказательство леммы 1

Составим матрицу $\tilde{A}$ из всех сумм столбцов независимого множества S . В $\tilde{A}$ все столбцы различны по определению.

Так как $A_{i,j} \in \{0, 1\}$, то $0 \leq \tilde{A}_{i,j} \leq |S|$.

Доказательство леммы 1

Составим матрицу $\tilde{A}$ из всех сумм столбцов независимого множества S . В $\tilde{A}$ все столбцы различны по определению.

Так как $A_{i,j} \in \{0, 1\}$, то $0 \leq \tilde{A}_{i,j} \leq |S|$.

Заметим, что $r = \text{rk } \tilde{A} \leq \text{rk } A$, так как столбцы $\tilde{A}$ лежат в линейной оболочке столбцов A .

Доказательство леммы 1

Составим матрицу $\tilde{A}$ из всех сумм столбцов независимого множества S . В $\tilde{A}$ все столбцы различны по определению.

Так как $A_{i,j} \in \{0, 1\}$, то $0 \leq \tilde{A}_{i,j} \leq |S|$.

Заметим, что $r = \text{rk } \tilde{A} \leq \text{rk } A$, так как столбцы $\tilde{A}$ лежат в линейной оболочке столбцов A .

Значит, есть такое множество R из r строк, что по матричным элементам столбцов из S и строк из R однозначно определяется каждый из столбцов матрицы $\tilde{A}$. Поэтому ограничения столбцов на строки из R должны все быть различными, так как все столбцы $\tilde{A}$ разные.

Доказательство леммы 1

Составим матрицу $\tilde{A}$ из всех сумм столбцов независимого множества S . В $\tilde{A}$ все столбцы различны по определению.

Так как $A_{i,j} \in \{0, 1\}$, то $0 \leq \tilde{A}_{i,j} \leq |S|$.

Заметим, что $r = \text{rk } \tilde{A} \leq \text{rk } A$, так как столбцы $\tilde{A}$ лежат в линейной оболочке столбцов A .

Значит, есть такое множество R из r строк, что по матричным элементам столбцов из S и строк из R однозначно определяется каждый из столбцов матрицы $\tilde{A}$. Поэтому ограничения столбцов на строки из R должны все быть различными, так как все столбцы $\tilde{A}$ разные.

Получаем неравенство $2^{|S|} \leq (|S| + 1)^r$, откуда следует $|S| = O(r \log r)$.

Максимальное независимое множество столбцов

Лемма 2.

Если S — максимальное по включению независимое множество столбцов A , то каждый столбец A выражается как ± 1 -линейная комбинация столбцов из S .

Максимальное независимое множество столбцов

Лемма 2.

Если S — максимальное по включению независимое множество столбцов A , то каждый столбец A выражается как ± 1 -линейная комбинация столбцов из S .

Доказательство.

Для столбцов из S очевидно.

Если к максимальному по включению независимому множеству S добавить другой столбец с номером j , то получим множество столбцов, в котором есть две одинаковые столбцовые суммы.

Одна из них включает j -й столбец. Пусть $A(X) = A(Y \cup \{j\})$.

Тогда $A(\{j\}) = A(X) - A(Y)$ — искомая ± 1 -линейная комбинация.

Доказательство теоремы HLS

Пусть S — максимальное по включению независимое множество столбцов A . Из леммы 2 получаем разложение матрицы A вида

$$A_{ij} = \sum_{k \in S} \lambda_k(j) A_{i,k},$$

где $\lambda_k(j) \in \{-1, 0, 1\}$ — коэффициенты разложения столбца j в линейную комбинацию столбцов из множества S .

Доказательство теоремы HLS

Пусть S — максимальное по включению независимое множество столбцов A . Из леммы 2 получаем разложение матрицы A вида

$$A_{ij} = \sum_{k \in S} \lambda_k(j) A_{i,k},$$

где $\lambda_k(j) \in \{-1, 0, 1\}$ — коэффициенты разложения столбца j в линейную комбинацию столбцов из множества S .

Для каждого k матрица с матричными элементами $\lambda_k(j) A_{i,k}$ имеет ранг 1, а её матричные элементы принадлежат множеству $\{-1, 0, 1\}$. Значит, $\text{rk}_{0,\pm 1} A \leq |S| = O(\text{rk } A \cdot \log \text{rk } A)$ по лемме 1.

Благодарю за внимание! Вопросы?