

Введение в теорию множеств: мини-курс

Александр Запрягаев

Международная лаборатория теоретической информатики, ФКН ВШЭ

Научная школа «Актуальные вопросы теории сложности, комбинаторной
теории матриц и теории графов»

18–20 сентября 2026 года, УЦ «Вороново»

Историческая справка

- 1874: теория множеств создана Георгом Кантором

Историческая справка

- 1874: теория множеств создана Георгом Кантором
- 1901: открытие парадокса Рассела

Историческая справка

- 1874: теория множеств создана Георгом Кантором
- 1901: открытие парадокса Рассела
- 1908: система аксиом Цермело

Историческая справка

- 1874: теория множеств создана Георгом Кантором
- 1901: открытие парадокса Рассела
- 1908: система аксиом Цермело
- 1922: уточнение системы Френкелем и Сколемом

Историческая справка

- 1874: теория множеств создана Георгом Кантором
- 1901: открытие парадокса Рассела
- 1908: система аксиом Цермело
- 1922: уточнение системы Френкелем и Сколемом
- 1925: фон Нейман предлагает аксиому регулярности

Историческая справка

- 1874: теория множеств создана Георгом Кантором
- 1901: открытие парадокса Рассела
- 1908: система аксиом Цермело
- 1922: уточнение системы Френкелем и Сколемом
- 1925: фон Нейман предлагает аксиому регулярности
- 1931: вторая теорема Гёделя о неполноте

Историческая справка

- 1874: теория множеств создана Георгом Кантором
- 1901: открытие парадокса Рассела
- 1908: система аксиом Цермело
- 1922: уточнение системы Френкелем и Сколемом
- 1925: фон Нейман предлагает аксиому регулярности
- 1931: вторая теорема Гёделя о неполноте
- 1940: (Гёдель) CH не опровержима в ZFC

Историческая справка

- 1874: теория множеств создана Георгом Кантором
- 1901: открытие парадокса Рассела
- 1908: система аксиом Цермело
- 1922: уточнение системы Френкелем и Сколемом
- 1925: фон Нейман предлагает аксиому регулярности
- 1931: вторая теорема Гёделя о неполноте
- 1940: (Гёдель) CH не опровержима в ZFC
- 1963: (Коэн) CH не доказуема в ZFC

Язык теории множеств

- Переменные $x, y, z, \dots$

Язык теории множеств

- Переменные $x, y, z, \dots$
- Бинарные связи $\in, =$

Язык теории множеств

- Переменные $x, y, z, \dots$
- Бинарные связи $\in, =$
- Скобки, запятые

Язык теории множеств

- Переменные $x, y, z, \dots$
- Бинарные связи $\in, =$
- Скобки, запятые
- Логические связи $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$

Язык теории множеств

- Переменные $x, y, z, \dots$
- Бинарные связи $\in, =$
- Скобки, запятые
- Логические связи $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
- Кванторы $\forall, \exists$

Язык теории множеств

- Переменные $x, y, z, \dots$
- Бинарные связи $\in, =$
- Скобки, запятые
- Логические связи $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
- Кванторы $\forall, \exists$

Атомарные формулы имеют вид $x \in y$ или $x = y$.

Язык теории множеств

- Переменные $x, y, z, \dots$
- Бинарные связи $\in, =$
- Скобки, запятые
- Логические связи $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
- Кванторы $\forall, \exists$

Атомарные формулы имеют вид $x \in y$ или $x = y$.

Формулы строятся из атомарных формул при помощи логических связок и кванторов.

Язык теории множеств

- Переменные $x, y, z, \dots$
- Бинарные связи $\in, =$
- Скобки, запятые
- Логические связи $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
- Кванторы $\forall, \exists$

Атомарные формулы имеют вид $x \in y$ или $x = y$.

Формулы строятся из атомарных формул при помощи логических связок и кванторов.

Пример:

$$\exists x (\forall y \neg(y \in x))$$

Язык теории множеств

- Переменные $x, y, z, \dots$
- Бинарные связи $\in, =$
- Скобки, запятые
- Логические связи $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$
- Кванторы $\forall, \exists$

Атомарные формулы имеют вид $x \in y$ или $x = y$.

Формулы строятся из атомарных формул при помощи логических связок и кванторов.

Пример:

$$\exists x (\forall y \neg(y \in x))$$

Такое множество называем *пустым* и обозначаем $\emptyset$. Мы будем позволять себе и другие подобные сокращения.

Аксиомы 0: Равенства

$$\forall x (x = x)$$

Аксиомы 0: Равенства

$$\forall x (x = x)$$

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

Аксиомы 0: Равенства

$$\forall x (x = x)$$

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$$

Аксиомы 0: Равенства

$$\forall x (x = x)$$

$$\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z)$$

$$\forall x \forall y \forall z \forall t (x = y \wedge z = t \rightarrow (x \in z \leftrightarrow y \in t))$$

Аксиома 1: Объёмности

Или экстенсionalности.

Аксиома 1: Объёмности

Или экстенсionalности.

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y)).$$

Аксиома 1: Объёмности

Или экстенциональности.

$$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y)).$$

Можно и иначе: не вводить отдельных аксиом равенства, а *определить* «равенство» $x = y$ как совпадение элементов ($x = y$ — сокращение от $\forall t (t \in x \leftrightarrow t \in y)$).

Тогда мы можем доказать все аксиомы равенства, *кроме последней*. И в качестве **Аксиомы 1** нам потребуется:

$$\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge x \in z \rightarrow y \in z)$$

Аксиома 2: Множества всех подмножеств

Введём, как всегда, сокращение: $x \subseteq y$ означает $\forall t (t \in x \rightarrow t \in y)$.

$$\forall x \exists y \forall u (u \in z \leftrightarrow u \subseteq x)$$

Аксиома 2: Множества всех подмножеств

Введём, как всегда, сокращение: $x \subseteq y$ означает $\forall t (t \in x \rightarrow t \in y)$.

$$\forall x \exists y \forall u (u \in z \leftrightarrow u \subseteq x)$$

Такое y обозначим $\mathcal{P}(x)$ — *множество всех подмножеств x* .

Аксиома 3: Объединения

$$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (u \in v \wedge v \in x))$$

Аксиома 3: Объединения

$$\forall x \exists y \forall u (u \in y \leftrightarrow \exists v (u \in v \wedge v \in x))$$

Такое y обозначим $\bigcup x$ — *объединение* x .

Аксиома 4: Пары

$$\forall x \forall y \exists u (\forall v (v \in u \leftrightarrow (v = x \vee v = y)))$$

Аксиома 4: Пары

$$\forall x \forall y \exists u \left(\forall v \left(v \in u \leftrightarrow (v = x \vee v = y) \right) \right)$$

Обозначение: $u := \{x, y\}$.

Парадокс Рассела

В наивной теории множеств предполагалась схема аксиом: пусть P — некоторое свойство (например, выразимое формулой $\psi(x)$ языка теории множеств). Тогда существует множество

$$\{x \mid \psi(x)\}.$$

Парадокс Рассела

В наивной теории множеств предполагалась схема аксиом: пусть P — некоторое свойство (например, выражимое формулой $\psi(x)$ языка теории множеств). Тогда существует множество

$$\{x \mid \psi(x)\}.$$

Однако Расселом было замечено: пусть $\psi(x) := x \notin x$. Рассмотрим множество

$$k = \{x \mid x \notin x\}.$$

Парадокс Рассела

В наивной теории множеств предполагалась схема аксиом: пусть P — некоторое свойство (например, выразимое формулой $\psi(x)$ языка теории множеств). Тогда существует множество

$$\{x \mid \psi(x)\}.$$

Однако Расселом было замечено: пусть $\psi(x) := x \notin x$. Рассмотрим множество

$$k = \{x \mid x \notin x\}.$$

Принадлежит ли k самому себе? Если $k \in k$, то $k \notin k$; если $k \notin k$, то $k \in k$. Противоречие.

Аксиома 5: Схема подстановки

Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_n, v, u)$ — произвольная формула с $n + 2$ свободными переменными.

Аксиома 5: Схема подстановки

Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_n, v, u)$ — произвольная формула с $n + 2$ свободными переменными.

$$\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall v \exists^{\leq 1} u \varphi(y_1, \dots, y_n, v, u) \rightarrow \\ \forall x \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v, u)))]$$

Аксиома 5: Схема подстановки

Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_n, v, u)$ — произвольная формула с $n + 2$ свободными переменными.

$$\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall v \exists^{\leq 1} u \varphi(y_1, \dots, y_n, v, u) \rightarrow \\ \forall x \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v, u)))]$$

Смысл: пусть $\varphi(v, u)$ «задаёт функцию f на всех множествах» — то есть каждому v сопоставляет *не более одного* $u = f(v)$.

Аксиома 5: Схема подстановки

Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_n, v, u)$ — произвольная формула с $n + 2$ свободными переменными.

$$\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall v \exists^{\leq 1} u \varphi(y_1, \dots, y_n, v, u) \rightarrow \\ \forall x \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v, u)))]$$

Смысл: пусть $\varphi(v, u)$ «задаёт функцию f на всех множествах» — то есть каждому v сопоставляет *не более одного* $u = f(v)$.

Тогда для любого x существует множество, состоящее в точности из всех $\{f(v) \mid v \in x\}$.

Аксиома 5: Схема подстановки

Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_n, v, u)$ — произвольная формула с $n + 2$ свободными переменными.

$$\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall v \exists^{\leq 1} u \varphi(y_1, \dots, y_n, v, u) \rightarrow \\ \forall x \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow \exists v (v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v, u)))]$$

Смысл: пусть $\varphi(v, u)$ «задаёт функцию f на всех множествах» — то есть каждому v сопоставляет *не более одного* $u = f(v)$.

Тогда для любого x существует множество, состоящее в точности из всех $\{f(v) \mid v \in x\}$.

«Образ множества под действием функции является множеством.»

Аксиома 6: Схема выделения

Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_n, v)$ — произвольная формула с $n + 1$ свободной переменной.

Аксиома 6: Схема выделения

Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_n, v)$ — произвольная формула с $n + 1$ свободной переменной.

$$\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall x \exists u \forall v (v \in u \leftrightarrow v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v))]$$

Аксиома 6: Схема выделения

Пусть $\varphi(y_1, \dots, y_n, v)$ — произвольная формула с $n + 1$ свободной переменной.

$$\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall x \exists u \forall v (v \in u \leftrightarrow v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v))]$$

Смысл: существует множество (подмножество x) $\{v \in x \mid \varphi(v)\}$.

Ловим лишнюю аксиому

Я утверждаю:

Теорема

Схема выделения $\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall x \exists u \forall v (v \in u \leftrightarrow v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v))]$
следует из остальных аксиом.

Ловим лишнюю аксиому

Я утверждаю:

Теорема

Схема выделения $\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall x \exists u \forall v (v \in u \leftrightarrow v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v))]$
следует из остальных аксиом.

Доказательство.

Пусть фиксированы параметры $y_1, \dots, y_n$, дано множество x и формула $\varphi(y_1, \dots, y_n, v)$. Мы хотим доказать, что множеством является $\{v \in x \mid \varphi(y_1, \dots, y_n, v)\}$.

Ловим лишнюю аксиому

Я утверждаю:

Теорема

Схема выделения $\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall x \exists u \forall v (v \in u \leftrightarrow v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v))]$
следует из остальных аксиом.

Доказательство.

Пусть фиксированы параметры $y_1, \dots, y_n$, дано множество x и формула $\varphi(y_1, \dots, y_n, v)$. Мы хотим доказать, что множеством является $\{v \in x \mid \varphi(y_1, \dots, y_n, v)\}$.

Возьмём в качестве $\psi(y_1, \dots, y_n, v, u)$ формулу:

$$\psi(y_1, \dots, y_n, v, u) := "v = u \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, u)".$$

Ловим лишнюю аксиому

Я утверждаю:

Теорема

Схема выделения $\forall y_1 \dots \forall y_n [\forall x \exists u \forall v (v \in u \leftrightarrow v \in x \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, v))]$
следует из остальных аксиом.

Доказательство.

Пусть фиксированы параметры $y_1, \dots, y_n$, дано множество x и формула $\varphi(y_1, \dots, y_n, v)$. Мы хотим доказать, что множеством является $\{v \in x \mid \varphi(y_1, \dots, y_n, v)\}$.

Возьмём в качестве $\psi(y_1, \dots, y_n, v, u)$ формулу:

$$\psi(y_1, \dots, y_n, v, u) := "v = u \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, u)".$$

Согласно **Схеме подстановки**, является множеством

$\{v \in x \mid \psi(y_1, \dots, y_n, v, u)\}$, что равно $\{v \in x \mid v = u \wedge \varphi(y_1, \dots, y_n, u)\}$. □

Пауза! Пустое множество

С помощью **Схемы выделения** мы теперь можем доказать, что пустое множество существует.

Пауза! Пустое множество

С помощью **Схемы выделения** мы теперь можем доказать, что пустое множество существует.

Пусть X — любое множество; тогда

$$\{u \in X \mid \neg(u = u)\} —$$

искомое множество.

Пауза! Пустое множество

С помощью **Схемы выделения** мы теперь можем доказать, что пустое множество существует.

Пусть X — любое множество; тогда

$$\{u \in X \mid \neg(u = u)\} —$$

искомое множество.

Согласно **Аксиоме объёмности**, пустое множество единственно; обозначим его за $\emptyset$.

Пауза! Пустое множество

С помощью **Схемы выделения** мы теперь можем доказать, что пустое множество существует.

Пусть X — любое множество; тогда

$$\{u \in X \mid \neg(u = u)\} —$$

искомое множество.

Согласно **Аксиоме объёмности**, пустое множество единственно; обозначим его за $\emptyset$.

Что хотя бы одно множество существует, мы полагаем как изначальную посылку наших рассуждений. Согласно *теореме Гёделя о полноте*, это эквивалентно тому, что аксиомы ZF непротиворечивы.

Пересмотр: Парадокс Рассела

Пропал ли теперь парадокс Рассела?

Пересмотр: Парадокс Рассела

Пропал ли теперь парадокс Рассела? Мы по-прежнему можем рассмотреть формулу $\psi(x) = x \notin x$; теперь, однако, мы не можем взять множество $\{x \mid x \notin x\}$, поскольку выделять нам разрешено только из существующих множеств.

Пересмотр: Парадокс Рассела

Пропал ли теперь парадокс Рассела? Мы по-прежнему можем рассмотреть формулу $\psi(x) = x \notin x$; теперь, однако, мы не можем взять множество $\{x \mid x \notin x\}$, поскольку выделять нам разрешено только из существующих множеств.

Более формально: пусть U — множество всех множеств. Тогда можно, по **Схеме выделения**, рассмотреть множество $\{x \in U \mid x \notin x\}$. Повторяя все рассуждения парадокса Рассела, приходим к противоречию.

Пересмотр: Парадокс Рассела

Пропал ли теперь парадокс Рассела? Мы по-прежнему можем рассмотреть формулу $\psi(x) = x \notin x$; теперь, однако, мы не можем взять множество $\{x \mid x \notin x\}$, поскольку выделять нам разрешено только из существующих множеств.

Более формально: пусть U — множество всех множеств. Тогда можно, по **Схеме выделения**, рассмотреть множество $\{x \in U \mid x \notin x\}$. Повторяя все рассуждения парадокса Рассела, приходим к противоречию. Следовательно, U не существует.

Итак, парадокс Рассела теперь становится рассуждением, доказывающим, что не существует множества всех множеств.

Не тут-то было

Оказывается, ещё одна из аксиом — тоже излишняя. Какая?

Не тут-то было

Оказывается, ещё одна из аксиом — тоже излишняя. Какая?

Теорема

Аксиома пары следует из остальных аксиом.

Не тут-то было

Оказывается, ещё одна из аксиом — тоже излишняя. Какая?

Теорема

Аксиома пары следует из остальных аксиом.

Доказательство.

Пусть даны множества a, b . Рассмотрим множество $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Очевидно, оно не равно $\emptyset$ (почему?).

Не тут-то было

Оказывается, ещё одна из аксиом — тоже излишняя. Какая?

Теорема

Аксиома пары следует из остальных аксиом.

Доказательство.

Пусть даны множества a, b . Рассмотрим множество $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Очевидно, оно не равно $\emptyset$ (почему?).

Теперь построим множество $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. В нём два элемента.

Не тут-то было

Оказывается, ещё одна из аксиом — тоже излишняя. Какая?

Теорема

Аксиома пары следует из остальных аксиом.

Доказательство.

Пусть даны множества a, b . Рассмотрим множество $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Очевидно, оно не равно $\emptyset$ (почему?).

Теперь построим множество $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. В нём два элемента.

Запишем формулу:

$$\varphi(v, u) := (v = \emptyset \wedge u = a) \vee (v = \{\emptyset\} \wedge u = b).$$

Не тут-то было

Оказывается, ещё одна из аксиом — тоже излишняя. Какая?

Теорема

Аксиома пары следует из остальных аксиом.

Доказательство.

Пусть даны множества a, b . Рассмотрим множество $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Очевидно, оно не равно $\emptyset$ (почему?).

Теперь построим множество $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. В нём два элемента.

Запишем формулу:

$$\varphi(v, u) := (v = \emptyset \wedge u = a) \vee (v = \{\emptyset\} \wedge u = b).$$

Она задаёт функцию f , поэтому, по **Схеме подстановки**, существует образ множества $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ под действием f . Это и есть искомое множество $\{a, b\}$. □

Пауза! Что мы уже умеем?

Построим *объединение* двух множеств:

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}.$$

Пауза! Что мы уже умеем?

Построим *объединение* двух множеств:

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}.$$

Построим *пересечение* двух множеств:

$$x \cap y := \{u \in x \mid u \in y\}.$$

Пауза! Что мы уже умеем?

Построим *объединение* двух множеств:

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}.$$

Построим *пересечение* двух множеств:

$$x \cap y := \{u \in x \mid u \in y\}.$$

Построим *разность* двух множеств:

$$x \setminus y := \{u \in x \mid u \notin y\}.$$

Пауза! Что мы уже умеем?

Построим *объединение* двух множеств:

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\}.$$

Построим *пересечение* двух множеств:

$$x \cap y := \{u \in x \mid u \in y\}.$$

Построим *разность* двух множеств:

$$x \setminus y := \{u \in x \mid u \notin y\}.$$

Построим *симметрическую разность* двух множеств:

$$x \triangle y := (x \setminus y) \cup (y \setminus x).$$

Аксиома 7: Бесконечности

Вся совокупность предшествующих аксиом не исключает того, что абсолютно все множества — конечные (хотя и сколь угодно больших размеров). Поэтому нужна аксиома, которая явно провозглашает бесконечные множества.

Аксиома 7: Бесконечности

Вся совокупность предшествующих аксиом не исключает того, что абсолютно все множества — конечные (хотя и сколь угодно больших размеров). Поэтому нужна аксиома, которая явно провозглашает бесконечные множества. Для её формулировки введём операцию *следования* $s(x) := x \cup \{x\}$.

$$\exists x [\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow s(u) \in x)].$$

Аксиома 7: Бесконечности

Вся совокупность предшествующих аксиом не исключает того, что абсолютно все множества — конечные (хотя и сколь угодно больших размеров). Поэтому нужна аксиома, которая явно провозглашает бесконечные множества. Для её формулировки введём операцию *следования* $s(x) := x \cup \{x\}$.

$$\exists x [\emptyset \in x \wedge \forall u (u \in x \rightarrow s(u) \in x)].$$

Множества, удовлетворяющие такому свойству, называются *индуктивными*. Тем самым, аксиома утверждает, что существует хотя бы одно индуктивное множество.

Натуральные числа

Однако хотелось бы иметь не произвольное бесконечное множество, а вполне конкретные натуральные числа

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Натуральные числа

Однако хотелось бы иметь не произвольное бесконечное множество, а вполне конкретные натуральные числа

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Мы не будем доказывать корректность нашего построения во всех душераздирающих деталях, но разберёмся с тем, как же работают в ZF натуральные числа.

Определение

- $0 := \emptyset$;
- если n определено, $n + 1 := s(n) = n \cup \{n\}$.

Устройство натуральных чисел

Тем самым,

- $0 = \emptyset$

Устройство натуральных чисел

Тем самым,

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\}$

Устройство натуральных чисел

Тем самым,

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Устройство натуральных чисел

Тем самым,

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Устройство натуральных чисел

Тем самым,

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

Устройство натуральных чисел

Тем самым,

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
- ...

Устройство натуральных чисел

Тем самым,

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
- ...

Замечаем:

Теорема

Для любого n , $n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Устройство натуральных чисел

Тем самым,

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
- ...

Замечаем:

Теорема

Для любого n , $n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство.

В самом деле: для 0 это верно.

Устройство натуральных чисел

Тем самым,

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{\emptyset\}$
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
- ...

Замечаем:

Теорема

Для любого n , $n + 1 = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство.

В самом деле: для 0 это верно. Если это верно для n , то

$$n + 1 = s(n) = n \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} \cup \{n\} = \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$



Доказательство существования $\mathbb{N}$

Аксиома бесконечности сообщает лишь, что существует некоторое множество x , содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $u \mapsto s(u)$.

Доказательство существования $\mathbb{N}$

Аксиома бесконечности сообщает лишь, что существует некоторое множество x , содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $u \mapsto s(u)$.

Заметим: отсюда всякое натуральное число n содержится в x . *Но почему существует множество $\mathbb{N}$, не содержащее ничего, кроме натуральных чисел?*

Доказательство существования $\mathbb{N}$

Аксиома бесконечности сообщает лишь, что существует некоторое множество x , содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $u \mapsto s(u)$. Заметим: отсюда всякое натуральное число n содержится в x . Но почему существует множество $\mathbb{N}$, не содержащее ничего, кроме натуральных чисел?

Теорема

$\mathbb{N}$ существует.

Доказательство.

Пусть x — произвольное индуктивное множество. Рассмотрим множество

$$N := \{n \in x \mid \forall s (s \text{ индуктивно} \rightarrow n \in s)\}.$$

Доказательство существования $\mathbb{N}$

Аксиома бесконечности сообщает лишь, что существует некоторое множество x , содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $u \mapsto s(u)$. Заметим: отсюда всякое натуральное число n содержится в x . *Но почему существует множество $\mathbb{N}$, не содержащее ничего, кроме натуральных чисел?*

Теорема

$\mathbb{N}$ существует.

Доказательство.

Пусть x — произвольное индуктивное множество. Рассмотрим множество

$$N := \{n \in x \mid \forall s (s \text{ индуктивно} \rightarrow n \in s)\}.$$

Понятно, что N — это пересечение всех возможных индуктивных множеств (почему?). Само N тоже индуктивно.

Доказательство существования $\mathbb{N}$

Аксиома бесконечности сообщает лишь, что существует некоторое множество x , содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $u \mapsto s(u)$. Заметим: отсюда всякое натуральное число n содержится в x . *Но почему существует множество $\mathbb{N}$, не содержащее ничего, кроме натуральных чисел?*

Теорема

$\mathbb{N}$ существует.

Доказательство.

Пусть x — произвольное индуктивное множество. Рассмотрим множество

$$N := \{n \in x \mid \forall s (s \text{ индуктивно} \rightarrow n \in s)\}.$$

Понятно, что N — это пересечение всех возможных индуктивных множеств (почему?). Само N тоже индуктивно. Каждое натуральное число $0, 1, 2, \dots$ лежит в N .

Доказательство существования $\mathbb{N}$

Аксиома бесконечности сообщает лишь, что существует некоторое множество x , содержащее $\emptyset$ и замкнутое относительно операции $u \mapsto s(u)$. Заметим: отсюда всякое натуральное число n содержится в x . *Но почему существует множество $\mathbb{N}$, не содержащее ничего, кроме натуральных чисел?*

Теорема

$\mathbb{N}$ существует.

Доказательство.

Пусть x — произвольное индуктивное множество. Рассмотрим множество

$$N := \{n \in x \mid \forall s (s \text{ индуктивно} \rightarrow n \in s)\}.$$

Понятно, что N — это пересечение всех возможных индуктивных множеств (почему?). Само N тоже индуктивно. Каждое натуральное число $0, 1, 2, \dots$ лежит в N . Почему больше ничего в N нет? □

$$N = \mathbb{N}$$

Доказательство.

Докажем, что всякий элемент N , кроме $\emptyset$, является s -последователем какого-либо другого его элемента.

$$N = \mathbb{N}$$

Доказательство.

Докажем, что всякий элемент N , кроме $\emptyset$, является s -последователем какого-либо другого его элемента.

Согласно аксиомам (которым?), можно записать множество

$$S := \{\emptyset\} \cup \{s(x) \mid x \in N\}.$$

$$N = \mathbb{N}$$

Доказательство.

Докажем, что всякий элемент N , кроме $\emptyset$, является s -последователем какого-либо другого его элемента.

Согласно аксиомам (которым?), можно записать множество

$$S := \{\emptyset\} \cup \{s(x) \mid x \in N\}.$$

С одной стороны, $S \subseteq N$, поскольку как $\emptyset$, так и s -последователь любого элемента N лежат в N .

$$N = \mathbb{N}$$

Доказательство.

Докажем, что всякий элемент N , кроме $\emptyset$, является s -последователем какого-либо другого его элемента.

Согласно аксиомам (которым?), можно записать множество

$$S := \{\emptyset\} \cup \{s(x) \mid x \in N\}.$$

С одной стороны, $S \subseteq N$, поскольку как $\emptyset$, так и s -последователь любого элемента N лежат в N .

С другой стороны, S индуктивно: оно содержит $\emptyset$, и, если $y \in S \subseteq N$, то $s(y)$ является s -последователем элемента N и поэтому лежит в N . Значит, $S \supseteq N$, то есть $S = N$. □

$$N = \mathbb{N}$$

Доказательство.

Докажем, что всякий элемент N , кроме $\emptyset$, является s -последователем какого-либо другого его элемента.

Согласно аксиомам (которым?), можно записать множество

$$S := \{\emptyset\} \cup \{s(x) \mid x \in N\}.$$

С одной стороны, $S \subseteq N$, поскольку как $\emptyset$, так и s -последователь любого элемента N лежат в N .

С другой стороны, S индуктивно: оно содержит $\emptyset$, и, если $y \in S \subseteq N$, то $s(y)$ является s -последователем элемента N и поэтому лежит в N . Значит, $S \supseteq N$, то есть $S = N$. □

Итак, всякий элемент N , кроме $\emptyset$, является последователем какого-либо другого элемента N .

$$N = \mathbb{N}$$

Доказательство.

Докажем, что всякий элемент N , кроме $\emptyset$, является s -последователем какого-либо другого его элемента.

Согласно аксиомам (которым?), можно записать множество

$$S := \{\emptyset\} \cup \{s(x) \mid x \in N\}.$$

С одной стороны, $S \subseteq N$, поскольку как $\emptyset$, так и s -последователь любого элемента N лежат в N .

С другой стороны, S индуктивно: оно содержит $\emptyset$, и, если $y \in S \subseteq N$, то $s(y)$ является s -последователем элемента N и поэтому лежит в N . Значит, $S \supseteq N$, то есть $S = N$. □

Итак, всякий элемент N , кроме $\emptyset$, является последователем какого-либо другого элемента N . Осталось понять, почему не бывает бесконечно убывающей башни s -предшественников. . .

Аксиома 8: Регулярности

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in x \wedge u \cap x = \emptyset))$$

Аксиома 8: Регулярности

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in x \wedge u \cap x = \emptyset))$$

Эта аксиома отличается от предыдущих своей *неконструктивностью*: каждая из прежних аксиом объявляла о существовании вполне конкретного множества, построенного на основе уже существующих (кроме аксиомы бесконечности, но даже она используется для того, чтобы иметь возможность работать с множеством натуральных чисел — вполне конкретным).

Аксиома 8: Регулярности

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists u (u \in x \wedge u \cap x = \emptyset))$$

Эта аксиома отличается от предыдущих своей *неконструктивностью*: каждая из прежних аксиом объявляла о существовании вполне конкретного множества, построенного на основе уже существующих (кроме аксиомы бесконечности, но даже она используется для того, чтобы иметь возможность работать с множеством натуральных чисел — вполне конкретным).

Аксиома регулярности провозглашает, что во всяком непустом множестве x есть некоторый элемент u , который не пересекается с x , но не объясняет, как именно найти такой элемент.

Применения аксиомы регулярности

Для начала, она даёт ещё одно обоснование, почему не существует множества всех множеств (но прежнее рассуждение работает и без неё). Установим ещё следствия.

Применения аксиомы регулярности

Для начала, она даёт ещё одно обоснование, почему не существует множества всех множеств (но прежнее рассуждение работает и без неё). Установим ещё следствия.

Теорема

Не существует множества x такого, что $x \in x$.

Применения аксиомы регулярности

Для начала, она даёт ещё одно обоснование, почему не существует множества всех множеств (но прежнее рассуждение работает и без неё). Установим ещё следствия.

Теорема

Не существует множества x такого, что $x \in x$.

Доказательство.

Предположим противное: пусть x — такое множество.

Применения аксиомы регулярности

Для начала, она даёт ещё одно обоснование, почему не существует множества всех множеств (но прежнее рассуждение работает и без неё). Установим ещё следствия.

Теорема

Не существует множества x такого, что $x \in x$.

Доказательство.

Предположим противное: пусть x — такое множество. Применим **Аксиому регулярности** к непустому множеству $\{x\}$.

Применения аксиомы регулярности

Для начала, она даёт ещё одно обоснование, почему не существует множества всех множеств (но прежнее рассуждение работает и без неё). Установим ещё следствия.

Теорема

Не существует множества x такого, что $x \in x$.

Доказательство.

Предположим противное: пусть x — такое множество. Применим **Аксиому регулярности** к непустому множеству $\{x\}$. Она говорит нам, что в $\{x\}$ есть элемент (очевидно, сам x), который не пересекается с x , то есть $x \notin x$.

Противоречие. □

Применения аксиомы регулярности

Теорема

Не существует бесконечной последовательности множеств $\dots \in x_2 \in x_1 \in x_0$.

Применения аксиомы регулярности

Теорема

Не существует бесконечной последовательности множеств $\dots \in x_2 \in x_1 \in x_0$.

Доказательство.

Предположим противное. Применяя **Схему подстановки**, мы можем получить множество

$$X = \{\dots, x_2, x_1, x_0\}.$$

Применения аксиомы регулярности

Теорема

Не существует бесконечной последовательности множеств $\dots \in x_2 \in x_1 \in x_0$.

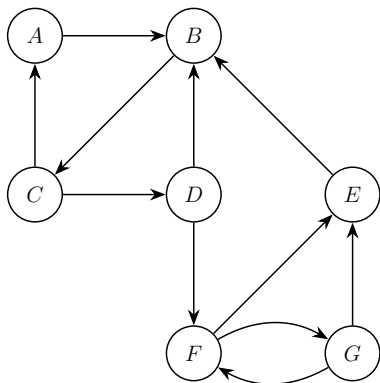
Доказательство.

Предположим противное. Применяя **Схему подстановки**, мы можем получить множество

$$X = \{\dots, x_2, x_1, x_0\}.$$

Воспользуемся **Аксиомой регулярности** для X : какой-то элемент $x_k \in X$ таков, что X не пересекается с x_k . Но в этом пересечении должен содержаться x_{k+1} . Противоречие. □

Патологический пример



отношение принадлежности:

$$C \in A$$

$$A, D, E \in B$$

$$B \in C$$

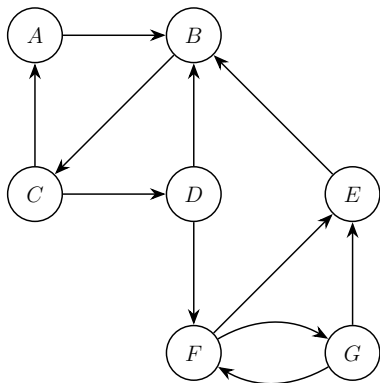
$$C \in D$$

$$F, G \in E$$

$$D, G \in F$$

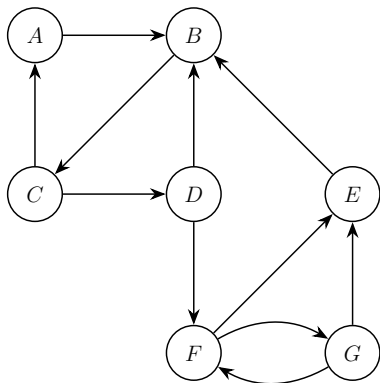
$$F \in G$$

Патологический пример



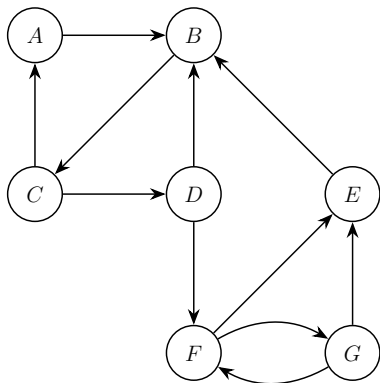
- Какие здесь подмножества?

Патологический пример



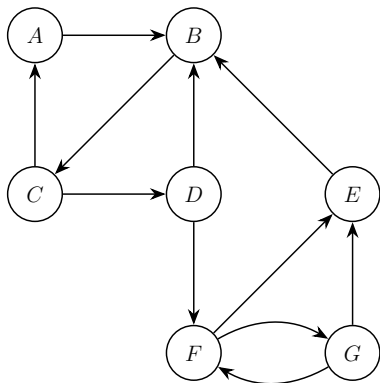
- Какие здесь подмножества?
 $A \subseteq D$, $D \subseteq A$, $G \subseteq E$, все — подмножества самих себя.

Патологический пример



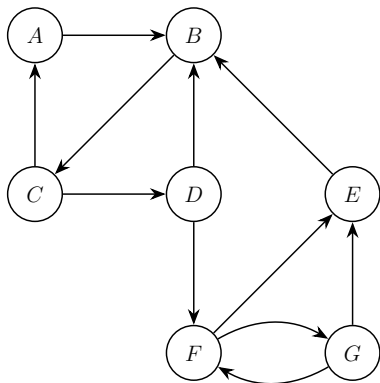
- Какие здесь подмножества?
 $A \subseteq D$, $D \subseteq A$, $G \subseteq E$, все — подмножества самих себя.
- Равенство?

Патологический пример



- Какие здесь подмножества?
 $A \subseteq D$, $D \subseteq A$, $G \subseteq E$, все — подмножества самих себя.
- Равенство? A и D различны, но у них одни и те же элементы.

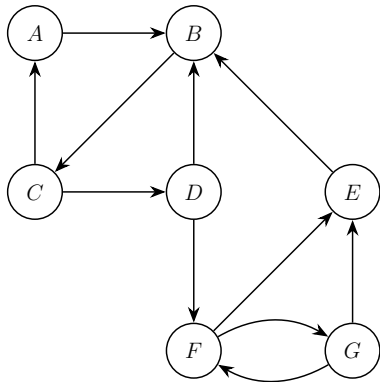
Патологический пример



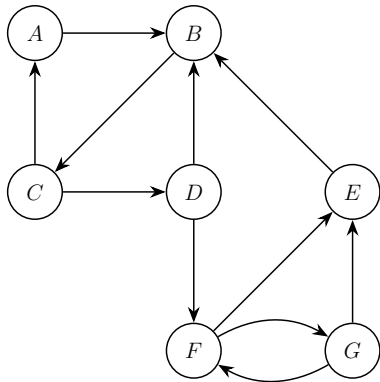
- Какие здесь подмножества?
 $A \subseteq D$, $D \subseteq A$, $G \subseteq E$, все — подмножества самих себя.
- Равенство? A и D различны, но у них одни и те же элементы.
- **Аксиома объёмности?** A и D «равны», но они не принадлежат одним и тем же множествам ($D \in F$, но $A \notin F$).

Патологический пример

- Пустое множество?

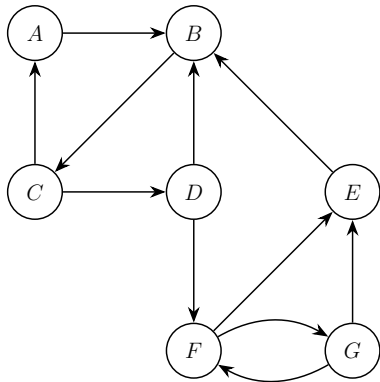


Патологический пример



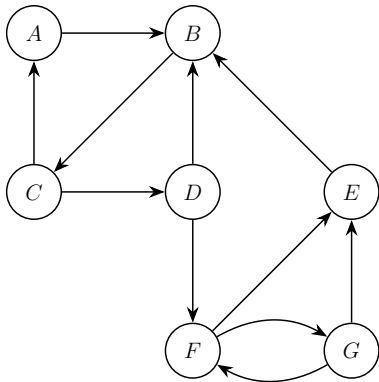
- Пустое множество? В каждом из наших «множеств» есть хотя бы по одному элементу.

Патологический пример



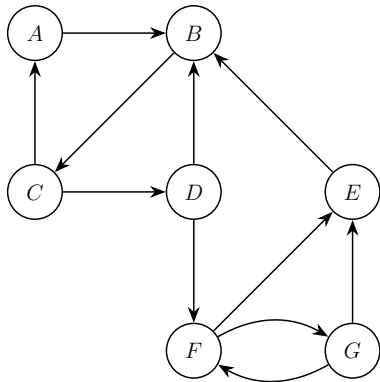
- Пустое множество? В каждом из наших «множеств» есть хотя бы по одному элементу.
- **Аксиома пары?**

Патологический пример



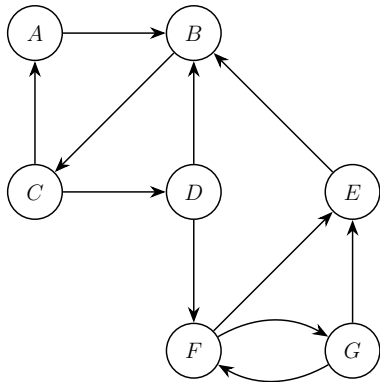
- Пустое множество? В каждом из наших «множеств» есть хотя бы по одному элементу.
- **Аксиома пары?** Нет такого множества, элементами которого были бы только C и G .

Патологический пример



- Пустое множество? В каждом из наших «множеств» есть хотя бы по одному элементу.
- **Аксиома пары?** Нет такого множества, элементами которого были бы только C и G .
- **Аксиома множества всех подмножеств?**

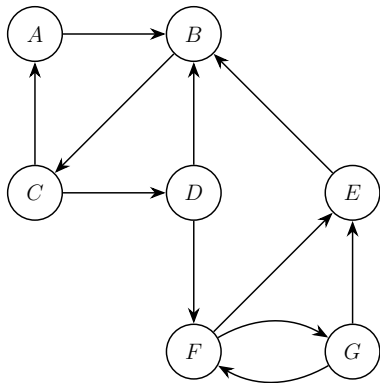
Патологический пример



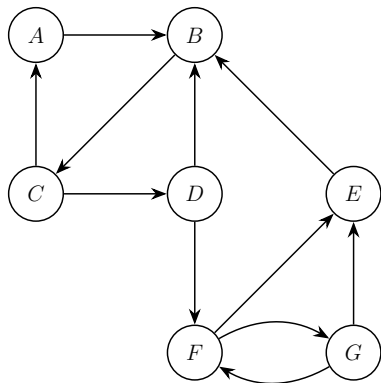
- Пустое множество? В каждом из наших «множеств» есть хотя бы по одному элементу.
- **Аксиома пары?** Нет такого множества, элементами которого были бы только C и G .
- **Аксиома множества всех подмножеств?** Подмножества D — это A и D , но нет такого множества, единственными элементами которого были бы A и D .

Патологический пример

- Аксиома объединения?



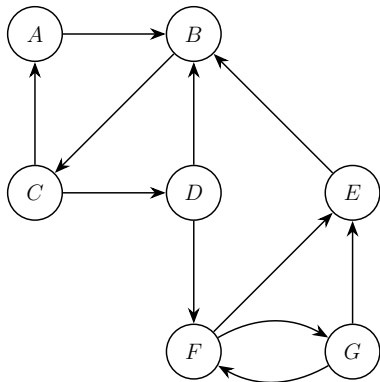
Патологический пример



- **Аксиома объединения?**

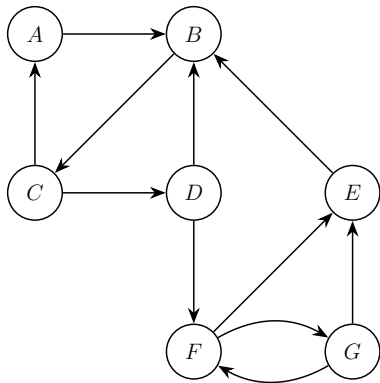
Элементы B — это A, D, E ;
элементы хотя бы одного из
 A, D или E — это C, F, G ; но
нет множества, содержащего
в точности C, F, G .

Патологический пример



- **Аксиома объединения?**
Элементы B — это A, D, E ;
элементы хотя бы одного из A, D или E — это C, F, G ; но
нет множества, содержащего
в точности C, F, G .
- **Схема выделения?**

Патологический пример



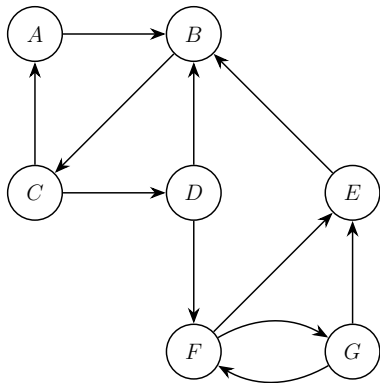
- **Аксиома объединения?**

Элементы B — это A, D, E ;
элементы хотя бы одного из
 A, D или E — это C, F, G ; но
нет множества, содержащего
в точности C, F, G .

- **Схема выделения?** Если

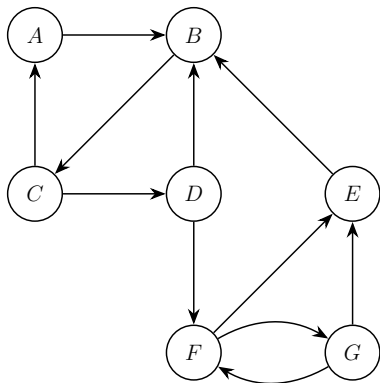
$\varphi(X) = C \in X$, то
 $\{S \in B : \varphi(S)\}$ не является
множеством.

Патологический пример



- **Аксиома объединения?**
Элементы B — это A, D, E ;
элементы хотя бы одного из A, D или E — это C, F, G ; но
нет множества, содержащего
в точности C, F, G .
- **Схема выделения?** Если
 $\varphi(X) = C \in X$, то
 $\{S \in B : \varphi(S)\}$ не является
множеством.
- **Аксиома регулярности?**

Патологический пример



- **Аксиома объединения?**
Элементы B — это A, D, E ;
элементы хотя бы одного из A, D или E — это C, F, G ; но
нет множества, содержащего
в точности C, F, G .
- **Схема выделения?** Если
 $\varphi(X) = C \in X$, то
 $\{S \in B : \varphi(S)\}$ не является
множеством.
- **Аксиома регулярности?**
Единственные элементы E —
это F и G , но оба не
дизъюнкты с E .

Упорядоченные пары

Продолжим строить нужные объекты. Часто нам бывает нужно учитывать порядок элементов. Как это делать?

Упорядоченные пары

Продолжим строить нужные объекты. Часто нам бывает нужно учитывать порядок элементов. Как это делать? Мы хотим получить такой объект (a, b) , чтобы $(a, b) = (a', b')$ в точности тогда, когда $a = a'$ и $b = b'$.

Упорядоченные пары

Продолжим строить нужные объекты. Часто нам бывает нужно учитывать порядок элементов. Как это делать? Мы хотим получить такой объект (a, b) , чтобы $(a, b) = (a', b')$ в точности тогда, когда $a = a'$ и $b = b'$.

Теорема

Пусть

$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (с **Аксиомой регулярности** можно и $\{a, \{a, b\}\}$).

Тогда $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ и } b = b'$.

Упорядоченные пары

Продолжим строить нужные объекты. Часто нам бывает нужно учитывать порядок элементов. Как это делать? Мы хотим получить такой объект (a, b) , чтобы $(a, b) = (a', b')$ в точности тогда, когда $a = a'$ и $b = b'$.

Теорема

Пусть

$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (с **Аксиомой регулярности** можно и $\{a, \{a, b\}\}$).

Тогда $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ и } b = b'$.

Доказательство.

В одну сторону очевидно. Пусть $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. Если a и b различны, то во множестве $\{a, b\}$ два элемента, откуда $\{a, b\}$ может равняться только $\{a', b'\}$, а $\{a\}$, соответственно, — $\{a'\}$. Отсюда $a = a'$ и $b = b'$.

Упорядоченные пары

Продолжим строить нужные объекты. Часто нам бывает нужно учитывать порядок элементов. Как это делать? Мы хотим получить такой объект (a, b) , чтобы $(a, b) = (a', b')$ в точности тогда, когда $a = a'$ и $b = b'$.

Теорема

Пусть

$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (с **Аксиомой регулярности** можно и $\{a, \{a, b\}\}$).

Тогда $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \text{ и } b = b'$.

Доказательство.

В одну сторону очевидно. Пусть $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. Если a и b различны, то во множестве $\{a, b\}$ два элемента, откуда $\{a, b\}$ может равняться только $\{a', b'\}$, а $\{a\}$, соответственно, — $\{a'\}$. Отсюда $a = a'$ и $b = b'$. Если же $a = b$, то $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}\}$, откуда $a = a' = b = b'$. □

Функции

Построим *декартово произведение*:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Какие аксиомы здесь нужны?

Функции

Построим *декартово произведение*:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Какие аксиомы здесь нужны?

$A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{A, B\})))$ — пары, множества всех подмножеств $\times 3$,

Схема выделения.

Функции

Построим *декартово произведение*:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Какие аксиомы здесь нужны?

$A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{A, B\})))$ — пары, множества всех подмножеств $\times 3$,

Схема выделения.

Построим *бинарное отношение*:

$$R \subseteq A \times B.$$

Функции

Построим *декартово произведение*:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Какие аксиомы здесь нужны?

$A \times B \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{A, B\})))$ — пары, множества всех подмножеств $\times 3$,

Схема выделения.

Построим *бинарное отношение*:

$$R \subseteq A \times B.$$

Построим *функцию*:

$$f(x) = y \Leftrightarrow F(x, y) \wedge \forall x \exists! y F(x, y).$$

Аксиома 9: Выбора

На этом мы закончили описание теории множеств ZF.

Аксиома 9: Выбора

На этом мы закончили описание теории множеств ZF. Чтобы получить ZFC, нужно добавить:

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists f: \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow x (\forall u \subseteq x f(u) \in u)).$$

Аксиома 9: Выбора

На этом мы закончили описание теории множеств ZF. Чтобы получить ZFC, нужно добавить:

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists f: \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow x (\forall u \subseteq x f(u) \in u)).$$

Неформально, существует функция, которая каждому непустому подмножеству x сопоставляет *одновременно* конкретный элемент в этом подмножестве.

Эквивалентные формы AC

У **Аксиомы выбора** AC много эквивалентных форм (то есть утверждений, которые равносильны AC в ZF).

Эквивалентные формы AC

У **Аксиомы выбора** AC много эквивалентных форм (то есть утверждений, которые равносильны AC в ZF). Например:

- Пусть $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — непустое семейство непустых множеств. Тогда произведение $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ непусто.
- **Лемма Цорна:** Пусть $(S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество, и у любого линейно упорядоченного подмножества S есть верхняя грань. Тогда в $(S, \preceq)$ есть максимальный элемент.

Эквивалентные формы AC

У **Аксиомы выбора** AC много эквивалентных форм (то есть утверждений, которые равносильны AC в ZF). Например:

- Пусть $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — непустое семейство непустых множеств. Тогда произведение $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ непусто.
- **Лемма Цорна:** Пусть $(S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество, и у любого линейно упорядоченного подмножества S есть верхняя грань. Тогда в $(S, \preceq)$ есть максимальный элемент.
- **Теорема Цермело:** На всяком множестве W существует такое отношение $\leq$, что $(W, \leq)$ вполне упорядочено. (Во *вполне упорядоченных* множествах у всякого непустого подмножества существует наименьший элемент.)

Эквивалентные формы AC

У **Аксиомы выбора** AC много эквивалентных форм (то есть утверждений, которые равносильны AC в ZF). Например:

- Пусть $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — непустое семейство непустых множеств. Тогда произведение $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ непусто.
- **Лемма Цорна:** Пусть $(S, \preceq)$ — частично упорядоченное множество, и у любого линейно упорядоченного подмножества S есть верхняя грань. Тогда в $(S, \preceq)$ есть максимальный элемент.
- **Теорема Цермело:** На всяком множестве W существует такое отношение $\leq$, что $(W, \leq)$ вполне упорядочено. (Во *вполне упорядоченных* множествах у всякого непустого подмножества существует наименьший элемент.)

Слабые формы выбора

Не все, однако, утверждения, сходные с **Аксиомой выбора**, эквивалентны ей.

Слабые формы выбора

Не все, однако, утверждения, сходные с **Аксиомой выбора**, эквивалентны ей. Так, более слабы следующие утверждения (каждое из них доказывается в ZFC, но ни одного из них вместе с ZF недостаточно, чтобы доказать AC):

- UF: всякий фильтр можно продолжить до ультрафильтра.

Слабые формы выбора

Не все, однако, утверждения, сходные с **Аксиомой выбора**, эквивалентны ей. Так, более слабы следующие утверждения (каждое из них доказывается в ZFC, но ни одного из них вместе с ZF недостаточно, чтобы доказать AC):

- UF: всякий фильтр можно продолжить до ультрафильтра.
- CC: Пусть $S_0, S_1, S_2, \dots$ — последовательность непустых множеств. Тогда произведение $\prod_{i=0}^{\infty} S_i$ непусто.

Слабые формы выбора

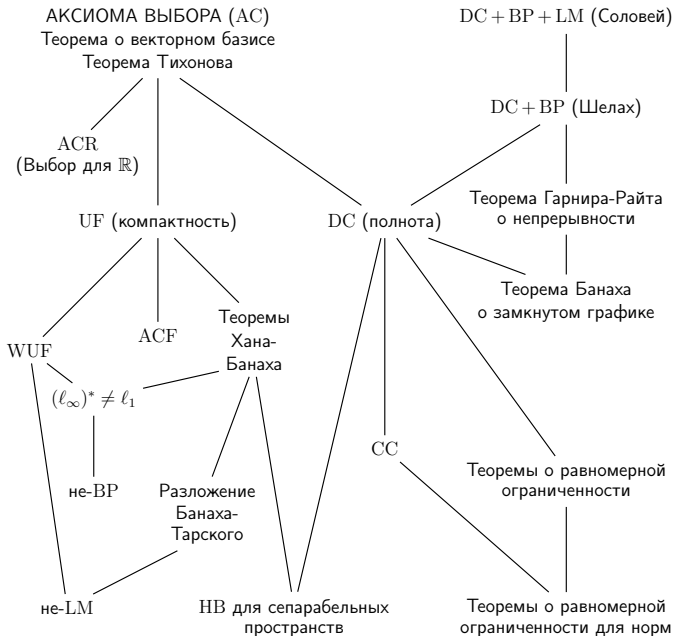
Не все, однако, утверждения, сходные с **Аксиомой выбора**, эквивалентны ей. Так, более слабы следующие утверждения (каждое из них доказывается в ZFC, но ни одного из них вместе с ZF недостаточно, чтобы доказать AC):

- UF: всякий фильтр можно продолжить до ультрафильтра.
- CC: Пусть $S_0, S_1, S_2, \dots$ — последовательность непустых множеств. Тогда произведение $\prod_{i=0}^{\infty} S_i$ непусто.
- DC: Пусть S непусто, и дана функция $f: S \rightarrow \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subseteq S$ такая, что для всех n имеет место $x_{n+1} \in f(x_n)$.

Слабые формы выбора

Не все, однако, утверждения, сходные с **Аксиомой выбора**, эквивалентны ей. Так, более слабы следующие утверждения (каждое из них доказывается в ZFC, но ни одного из них вместе с ZF недостаточно, чтобы доказать AC):

- UF: всякий фильтр можно продолжить до ультрафильтра.
- CC: Пусть $S_0, S_1, S_2, \dots$ — последовательность непустых множеств. Тогда произведение $\prod_{i=0}^{\infty} S_i$ непусто.
- DC: Пусть S непусто, и дана функция $f: S \rightarrow \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subseteq S$ такая, что для всех n имеет место $x_{n+1} \in f(x_n)$.
- **Разложение Банаха-Тарского:** пусть B — единичный шар в $\mathbb{R}^3$. Тогда существует разбиение $B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3 \sqcup C_4 \sqcup C_5$ такое, что только параллельными переносами и поворотами можно собрать из $C_{1,2}$ и $C_{3,4,5}$ по копии исходного шара.



Степень непротиворечивости

Если ZF непротиворечива, то непротиворечивы и следующие наборы аксиом:

Степень непротиворечивости

Если ZF непротиворечива, то непротиворечивы и следующие наборы аксиом:

- ZFC;

Степень непротиворечивости

Если ZF непротиворечива, то непротиворечивы и следующие наборы аксиом:

- ZFC;
- $ZF + BP + LM$;

Степень непротиворечивости

Если ZF непротиворечива, то непротиворечивы и следующие наборы аксиом:

- ZFC;
- $ZF + BP + LM$;
- $ZF + UF + \neg CC$;

Степень непротиворечивости

Если ZF непротиворечива, то непротиворечивы и следующие наборы аксиом:

- ZFC;
- ZF + BP + LM;
- ZF + UF + $\neg$ CC;
- ZF + DC + HB + «все ультрафильтры — главные»;

Степень непротиворечивости

Если ZF непротиворечива, то непротиворечивы и следующие наборы аксиом:

- ZFC;
- ZF + BP + LM;
- ZF + UF + $\neg$ CC;
- ZF + DC + HB + «все ультрафильтры — главные»;
- ZF + DC + BP;

Степень непротиворечивости

Если ZF непротиворечива, то непротиворечивы и следующие наборы аксиом:

- ZFC;
- ZF + BP + LM;
- ZF + UF + $\neg$ CC;
- ZF + DC + HB + «все ультрафильтры — главные»;
- ZF + DC + BP;
- ZF + DC + BP + $\neg$ LM.

Степень непротиворечивости

Если ZF непротиворечива, то непротиворечивы и следующие наборы аксиом:

- ZFC;
- ZF + BP + LM;
- ZF + UF + $\neg$ CC;
- ZF + DC + HB + «все ультрафильтры — главные»;
- ZF + DC + BP;
- ZF + DC + BP + $\neg$ LM.

Спасибо!