

Интуиционистская теория типов и её теоретико-множественная семантика

Определения и конструкция модели

Соколов Павел Павлович

Научная школа МЛ ТИ в Вороново, 19 сентября 2026 г.

Интуиционистская теория типов

Что такое ИТТ: общая идея

- Интуиционистская теория типов (ИТТ) — формальная система, позволяющая рассуждать одновременно о **логике**, **данных** и **вычислениях**.
- Основания конструктивизма: Брауэр, Гейтинг; представление в теоретико-типовом виде — *Martin-Löf type theory* (1972, 1984).
- Ключевой принцип: **доказательство = терм**, **утверждение = тип**.
- Конструктивность: свидетельство существования — явный терм.

Логика	Теория типов
утверждение A	тип A
доказательство A	терм $t : A$
$A \Rightarrow B$	тип функций $A \rightarrow B$
$A \wedge B$	тип произведений $A \times B$
$A \vee B$	тип сумм $A + B$
$\forall x \in A. B(x)$	Π -тип $\prod_{x:A} B(x)$
$\exists x \in A. B(x)$	Σ -тип $\sum_{x:A} B(x)$
$\perp$	пустой тип 0
$\top$	единичный тип 1

Синтаксис: сорта и суждения

Определение (Сорта)

В базовой ИТТ два сорта:

$$A : \text{Type } \ell, \quad a : A.$$

Первое читается « A — тип на уровне ℓ », второе — « a — элемент типа A ».

Определение (Контекст)

Контекстом (обозначается Γ) называется список пар вида $x : A$.

$$\Gamma ::= \cdot \mid \Gamma, x : A$$

Определение (Основные формы суждений)

$$\Gamma \vdash, \quad \Gamma \vdash A : \text{Type } \ell, \quad \Gamma \vdash a : A, \quad \Gamma \vdash A = B : \text{Type } \ell, \quad \Gamma \vdash a = b : A.$$

Равенства на типах и термах определяются как наименьшие конгруэнции, удовлетворяющие описанным далее правилам вывода.

Логические правила (I)

Корректность контекста и типизация переменных.

$$\frac{}{\cdot \vdash} \quad \frac{\Gamma \vdash \quad \Gamma \vdash A : \text{Type } \ell}{\Gamma, x : A \vdash} \quad \frac{\Gamma \vdash \quad (x : A) \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}$$

Π-тип (зависимые функции).

$$\frac{\Gamma \vdash A : \text{Type } \kappa \quad \Gamma, x : A \vdash B(x) : \text{Type } \ell}{\Gamma \vdash \prod_{x:A} B(x) : \text{Type } (\kappa \vee \ell)}$$
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x)}{\Gamma \vdash \lambda x. b(x) : \prod_{x:A} B(x)} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x:A} B(x) \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash f(a) : B(a)}$$
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash b(x) : B(x) \quad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash (\lambda x. b(x))(a) = b(a) : B(a)}$$

При B , не зависящем от x , получается тип «обычных» функций $A \rightarrow B$.

Σ -тип (зависимые пары).

$$\frac{\Gamma \vdash A : \text{Type} \quad \Gamma, x : A \vdash B(x) : \text{Type}}{\Gamma \vdash \sum_{x:A} B(x) : \text{Type}}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B(a)}{\Gamma \vdash (a, b) : \sum_{x:A} B(x)} \quad \frac{\Gamma \vdash p : \sum_{x:A} B(x)}{\Gamma \vdash \pi_1(p) : A} \quad \frac{\Gamma \vdash p : \sum_{x:A} B(x)}{\Gamma \vdash \pi_2(p) : B(\pi_1(p))}$$
$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B(a)}{\Gamma \vdash \pi_1((a, b)) = a : A} \quad \frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash b : B(a)}{\Gamma \vdash \pi_2((a, b)) = b : B(a)}$$

При B , не зависящем от x , получается тип «обычных» пар $A \times B$.

Логические правила (III)

0-тип и 1-тип.

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathbf{0} : \text{Type} \ell} \quad \frac{\Gamma \vdash o : \mathbf{0} \quad \Gamma \vdash A : \text{Type} \ell}{\Gamma \vdash \text{absurd}(o) : A} \quad \frac{\Gamma \vdash}{\mathbf{1} : \text{Type} \ell} \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash () : \mathbf{1}}$$

2-тип.

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathbf{2} : \text{Type} \ell} \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \text{true} : \mathbf{2}} \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \text{false} : \mathbf{2}} \quad \Gamma \vdash b : \mathbf{2} \quad \Gamma, x : \mathbf{2} \vdash A(x) : \text{Type} \ell \quad \Gamma \vdash a_t : A(\text{true}) \quad \Gamma \vdash a_f : A(\text{false})}{\Gamma \vdash \text{if}(b, a_t, a_f) : A(b)}$$
$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{2} \vdash A(x) : \text{Type} \ell \quad \Gamma \vdash a_t : A(\text{true}) \quad \Gamma \vdash a_f : A(\text{false})}{\Gamma \vdash \text{if}(\text{true}, a_t, a_f) = a_t : A(\text{true})}$$
$$\frac{\Gamma, x : \mathbf{2} \vdash A(x) : \text{Type} \ell \quad \Gamma \vdash a_t : A(\text{true}) \quad \Gamma \vdash a_f : A(\text{false})}{\Gamma \vdash \text{if}(\text{false}, a_t, a_f) = a_f : A(\text{false})}$$

Логические правила (IV)

Тип натуральных чисел.

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \mathbb{N} : \text{Type } \ell} \quad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \text{zero} : \mathbb{N}} \quad \frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{succ}(n) : \mathbb{N}}$$

Здесь и далее для облегчения нотации контекст Γ опускается.

$$\frac{n : \mathbb{N} \quad x : \mathbb{N} \vdash A(x) : \text{Type } \ell \quad b : A(\text{zero}) \quad s : \prod_{n:\mathbb{N}} (A(n) \rightarrow A(\text{succ}(n)))}{\text{natrec}(n, b, s) : A(n)}$$

$$\frac{x : \mathbb{N} \vdash A(x) : \text{Type } \ell \quad b : A(\text{zero}) \quad s : \prod_{n:\mathbb{N}} (A(n) \rightarrow A(\text{succ}(n)))}{\text{natrec}(\text{zero}, b, s) = b : A(\text{zero})}$$

$$\frac{n : \mathbb{N} \quad x : \mathbb{N} \vdash A(x) : \text{Type } \ell \quad b : A(\text{zero}) \quad s : \prod_{n:\mathbb{N}} (A(n) \rightarrow A(\text{succ}(n)))}{\text{natrec}(\text{succ}(n), b, s) = s(n)(\text{natrec}(n, b, s)) : A(\text{succ}(n))}$$

Тип идентификаций.

$$\frac{A : \text{Type } \ell \quad a : A \quad b : A}{\text{Id}_A(a, b) : \text{Type } \ell}$$

$$\frac{A : \text{Type } \ell \quad a : A}{\text{refl}(a) : \text{Id}_A(a, a)}$$

$$\frac{\begin{array}{l} A : \text{Type } \kappa \quad a : A \quad b : A \quad p : \text{Id}_A(a, b) \\ x : A, y : \text{Id}_A(a, x) \vdash C(x, y) : \text{Type } \ell \quad q : C(a, \text{refl}(a)) \end{array}}{\text{idrec}(p, q) : C(b, p)}$$

$$\frac{A : \text{Type } \kappa \quad a : A \quad x : A, y : \text{Id}_A(a, x) \vdash C(x, y) : \text{Type } \ell \quad q : C(a, \text{refl}(a))}{\text{idrec}(\text{refl}(a), q) = q : C(a, \text{refl}(a))}$$

ИТТ содержит последовательность *вселенных*:

$$\text{Type } 0 : \text{Type } 1 : \text{Type } 2 : \dots$$

Также в систему можно добавить правило *кумулятивности*:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \text{Type } \ell}{\Gamma \vdash A : \text{Type } (\ell + 1)}.$$

Последнее, самое важное правило – правило *конверсии*:

$$\frac{\Gamma \vdash a : A \quad \Gamma \vdash A = A' : \text{Type } \ell}{\Gamma \vdash a : A'}$$

Вычислительное ядро: нормализация

- Вместо собственно равенства имеет смысл ввести отношение *одношаговой редукции*:

$$(\lambda x.f(x))(a) \rightarrow f(a) \quad \pi_1((a,b)) \rightarrow a \quad \dots$$

- **Конфлюэнтность**: отношение одношаговой редукции обладает свойством ромба (не очевидно!).
- **Сильная нормализация**: любой корректно типизированный терм редуцируется к своей нормальной форме (не очевидно!).
- Следствие: правило конверсии алгоритмически реализуемо, и проверка типов разрешима.
- Именно это делает ИТТ пригодной как язык доказательств (Coq, Agda, Lean, Idris,...).

-  P. Martin-Löf. *Intuitionistic Type Theory*. Bibliopolis, 1984.
-  B. Nordström, K. Petersson, J. M. Smith. *Programming in Martin-Löf's Type Theory*. Oxford, 1990.
-  The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. IAS, 2013.
-  B. Jacobs. *Categorical Logic and Type Theory*. Elsevier, 1999.
-  P. Dybjer. *Inductive families*. Formal Aspects of Computing, 1994.