

Отображения матриц, сохраняющие спектральные условия

Линиченко Дарья Алексеевна

Руководитель: Максаев Артём Максимович
Соруководитель: Промыслов Валентин Валерьевич

19 сентября 2026 г.

Linear preserver problems – класс задач, связанных с отображениями на матрицах, сохраняющими определенные функции, отношения или подмножества.

Примеры (T - линейное):

- $\det T(A) = \det A$.
- $\operatorname{rk} T(A) = \operatorname{rk} A$.
- $\det(A + B) = 0 \iff \det(T(A) + T(B)) = 0$.
- $\operatorname{spec}(T(A)) = \operatorname{spec}(A)$.

Определение

Пусть $Y \subseteq M_n(\mathbb{F})$. Скажем, что отображение $T: Y \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ **стандартно**, если существуют $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{F})$ такие, что

$$T(A) = PAQ \quad \forall A \in Y \quad \text{или} \quad T(A) = PA^T Q \quad \forall A \in Y$$

Если $\det(PQ) = 1$, то скажем, что отображение стандартно с определителем 1.

Теорема Фробениуса

Пусть $T : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ - линейное биективное отображение, сохраняющее определитель, т.е.

$$\det(T(A)) = \det(A) \quad \forall A \in M_n(\mathbb{C}).$$

Тогда T стандартно с определителем 1.

Условие биективности можно опустить.

 V. Tan, F. Wang, On determinant preserver problems, Linear Algebra Appl. 2003.

Теорема Тана-Ванга

Пусть $|\mathbb{F}| > n$ и $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ — отображение, удовлетворяющее условию

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B))$$

для всех $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда T стандартно с определителем 1.

На самом деле достаточно выполнения равенства для $n - 1$ ненулевого значения.

 V. Tan, F. Wang, On determinant preserver problems, Linear Algebra Appl. 2003.

Теорема Тана-Ванга о двух значениях

Пусть $|\mathbb{F}| > n$ и $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ — **сюрьективное** отображение такое, что

$$\det(A + \lambda_i B) = \det(T(A) + \lambda_i T(B))$$

для всех $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и $i = 1, 2$, где $\lambda_i \in F^*$ и $(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^k \neq 1$
 $\forall 1 \leq k \leq n - 2$. Тогда T стандартно с определителем 1.

Аналогичные результаты можно сформулировать для отображений $T: \text{GL}_n \rightarrow \text{GL}_n$, а также для двух отображений.

 V. Tan, F. Wang, On determinant preserver problems, Linear Algebra Appl. 2003.

Теорема Тана-Ванга

Пусть $|\mathbb{F}| > n$ и $T: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ — отображение, удовлетворяющее условию

$$\det(A + \lambda B) = \det(T(A) + \lambda T(B))$$

для всех $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Тогда T стандартно с определителем 1.

На самом деле достаточно выполнения равенства для $n - 1$ ненулевого значения.

Теорема Тана–Ванга: схема доказательства

1. Сравнение коэффициентов

Многочлены $\det(A + \lambda B)$ и $\det(T(A) + \lambda T(B))$ имеют степень не выше n и совпадают при всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Поскольку $|\mathbb{F}| > n$, их коэффициенты равны. При λ^{n-1} получаем

$$\sum_{i,j} A_{ij} B^{ij} = \sum_{i,j} T(A)_{ij} T(B)^{ij},$$

где B^{ij} — алгебраическое дополнение элемента B_{ij} .

Теорема Тана–Ванга: схема доказательства

1. Сравнение коэффициентов

Многочлены $\det(A + \lambda B)$ и $\det(T(A) + \lambda T(B))$ имеют степень не выше n и совпадают при всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Поскольку $|\mathbb{F}| > n$, их коэффициенты равны. При λ^{n-1} получаем

$$\sum_{i,j} A_{ij} B^{ij} = \sum_{i,j} T(A)_{ij} T(B)^{ij},$$

где B^{ij} — алгебраическое дополнение элемента B_{ij} .

2. Выбор матриц

Матрицы из $SL_n(\mathbb{F})$ порождают $M_n(\mathbb{F})$. Выберем из них базис $C_1, \dots, C_{n^2}$ и положим $B_k = (C_k^{-1})^\top$. Тогда матрица алгебраических дополнений $(B_k^{ij})_{i,j}$ равна C_k .

Теорема Тана–Ванга: линейность и стандартный вид

Матрица алгебраических дополнений $(B_k^{ij})_{i,j}$ равна C_k .

Обозначим через $\nu_A \in \mathbb{F}^{n^2}$ вектор строк матрицы A , записанных подряд.

3. Матричная запись

Подставляя $B = B_k$ в $\sum_{i,j} A_{ij} B^{ij} = \sum_{i,j} T(A)_{ij} T(B)^{ij}$, получаем

$$X\nu_A = Y\nu_{T(A)} \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F}),$$

где k -е строки матриц X, Y имеют вид

$$X_{k,\cdot} = \nu_{C_k}^\top, \quad Y_{k,\cdot} = (T(B_k)^{11}, T(B_k)^{12}, \dots, T(B_k)^{nn}).$$

Матрица X обратима, поскольку $C_1, \dots, C_{n^2}$ образуют базис.

Теорема Тана–Ванга: линейность и стандартный вид

Обозначим через $\nu_A \in \mathbb{F}^{n^2}$ вектор строк матрицы A , записанных подряд.

3. Матричная запись

Подставляя $B = B_k$ в $\sum_{i,j} A_{ij} B^{ij} = \sum_{i,j} T(A)_{ij} T(B)^{ij}$, получаем

$$X\nu_A = Y\nu_{T(A)} \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F}),$$

где k -е строки матриц X, Y имеют вид

$$X_{k,\cdot} = \nu_{C_k}^\top, \quad Y_{k,\cdot} = (T(B_k)^{11}, T(B_k)^{12}, \dots, T(B_k)^{nn}).$$

Матрица X обратима, поскольку $C_1, \dots, C_{n^2}$ образуют базис.

4. Линейность

$X\nu_{E_{ij}} = Y\nu_{T(E_{ij})} \implies XI_{n^2} = YJ$, где столбцы J – это $\nu_{T(E_{ij})}$ в естественном порядке $\implies Y$ обратима $\implies \nu_{T(A)} = Y^{-1}X\nu_A$, то есть T представимо матрицей, если смотреть на исходную матрицу как на вектор длины n^2 в базисе $E_{ij} \implies T$ линейно. При $\lambda = 0$ имеем $\det T(A) = \det A$. По теореме Фробениуса получаем стандартный вид.

Сохранение определителя для одного значения

 С. Costara, Nonlinear determinant preserving maps on matrix algebras, Linear Algebra Appl., 2019.

Теорема Костара

Предположим, что $\mathbb{F}$ — поле с $|\mathbb{F}| \geq n^2 + 1$. Пусть $\varphi, \psi : M_n \rightarrow M_n$ — отображения, **одно из которых сюръективно**, такие что

$$\det(\varphi(x) + \psi(y)) = \det(x + y) \quad (x, y \in M_n).$$

Тогда существуют $x_0 \in M_n$ и $u, v \in M_n$, удовлетворяющие $\det(uv) = 1$ такие, что либо

$$\varphi(x) = u(x + x_0)v \quad (x \in M_n) \quad \text{и} \quad \psi(x) = u(x - x_0)v \quad (x \in M_n),$$

либо

$$\varphi(x) = u(x + x_0)^t v \quad (x \in M_n) \quad \text{и} \quad \psi(x) = u(x - x_0)^t v \quad (x \in M_n).$$

Сколько значений требуется, чтобы избавиться от сюръективности в постановке Тана-Ванга и Костары? Достаточно ли одного значения (без предположения условия сюръективности), чтобы сделать вывод о стандартном виде отображения?

Пучковое условие для вырожденности

$\det(A + \lambda B) = 0 \iff \det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = 0$ для всех матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и $\lambda \in \mathbb{F}^*$.

Одностороннее пучковое условие для вырожденности

$\det(A + \lambda B) = 0 \implies \det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = 0$ для всех матриц $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ и $\lambda \in \mathbb{F}^*$.

 А.Е. Guterman, А.М. Maksaev, V.V. Promyslov, Pairs of maps preserving singularity on matrix algebras, Linear Algebra Appl., 2022.

Теорема (Гутерман-Максаев-Промыслов)

Пусть поле $\mathbb{F}$ алгебраически замкнуто, а $T_1, T_2: M_n(\mathbb{F}) \rightarrow M_n(\mathbb{F})$ — отображения. Тогда следующие условия эквивалентны:

- ① T_1, T_2 удовлетворяют пучковому условию для вырожденности.
- ② T_1, T_2 удовлетворяют одностороннему пучковому условию для вырожденности, и существует $D \in \text{GL}_n(\mathbb{F})$, что $T_2(D) \in \text{GL}_n(\mathbb{F})$
- ③ $T_1 = T_2$, и эти отображения стандартны.

Пучковое: $\det(A + \lambda B) = 0 \iff \det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = 0$,

Одностороннее: $\det(A + \lambda B) = 0 \implies \det(T_1(A) + \lambda T_2(B)) = 0$.

Теорема

Пусть $T_1, T_2 : H_n(\mathbb{C}) \rightarrow H_n(\mathbb{C})$ – отображения. Тогда следующие условия эквивалентны.

- 1 Отображения T_1, T_2 удовлетворяют пучковому условию для вырожденности на $H_n(\mathbb{C})$.
- 2 Отображения T_1, T_2 удовлетворяют одностороннему пучковому условию для вырожденности на $H_n(\mathbb{C})$, и существует матрица $D \in GL_n(\mathbb{C}) \cap H_n(\mathbb{C})$ такая, что $T_2(D) \in GL_n(\mathbb{C})$.
- 3 Выполнено $T_1 = T_2$, и это отображение имеет эрмитову стандартную форму на всём $H_n(\mathbb{C})$, то есть существуют $P \in GL_n(\mathbb{C})$ и $r \in \mathbb{R}^*$ такие, что либо

$$T_1(A) = T_2(A) = rPAP^* \quad \text{для всех } A \in H_n(\mathbb{C}),$$

либо

$$T_1(A) = T_2(A) = rPA^tP^* \quad \text{для всех } A \in H_n(\mathbb{C}).$$

Необходимое определение

Для $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{H}_n$ с $U + V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ будем говорить, что пара (U, V) удовлетворяет специальным условиям, если существуют матрицы

$$B_1, \dots, B_{n^2} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{H}_n \quad \text{и} \quad A_1, \dots, A_{n^2} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{H}_n$$

такие, что выполняются следующие три свойства:

- ❶ $B_1^{-1}, B_2^{-1}, \dots, B_{n^2}^{-1}$ образуют базис H_n над $\mathbb{R}$;
- ❷ для всех $i = 1, 2, \dots, n^2$ выполнено

$$|\mathrm{spec}(UB_i^{-1})| = |\mathrm{spec}(VB_i^{-1})| = |\mathrm{spec}((U+V)B_i^{-1})| = n;$$

- ❸ $A_1, A_2, \dots, A_{n^2}$ образуют базис H_n над $\mathbb{R}$ и

$$|\mathrm{spec}(A_j B_i^{-1})| = n \quad \text{для всех } i, j = 1, 2, \dots, n^2.$$

- Для доказательства выполнения специальных условий вместо треугольных матриц мы используем эрмитовы матрицы, имеющие не более одной внедиагональной пары.
- Специальные условия доказываются для диагональных пар, затем с помощью преобразований переносятся на пары, в которых одна матрица положительно определена, и после этого используются для доказательства линейности в общем случае.
- Нужен отдельный эрмитов аналог классификации линейных отображений, сохраняющих определитель с точностью до постоянного множителя.
- Нельзя свести задачу к случаю $T_2(I) = I$ нормировкой, поэтому доказываем напрямую.

Что еще можно делать

- Изучить симметричные матрицы (над произвольным полем, или вещественные симметричные), удовлетворяющие пучковому условию для вырожденности.
- Рассмотреть отображения, удовлетворяющие пучковому условию для вырожденности, в случае не алгебраически замкнутого поля.
- Изучить полиномиальные отображения в постановке Тана-Ванга.
- Выяснить, сколько значений требуется, чтобы избавиться от сюръективности в теореме Тана-Ванга.
- Изучить отображения $T: GL_n(\mathbb{F}) \rightarrow GL_n(\mathbb{F})$, сохраняющие ранг, но не линейные, а такие, что $\text{rk}(A + \lambda B) = \text{rk}(T(A) + \lambda T(B))$.

Спасибо за внимание!

