I математическая олимпиада
Факультета компьютерных наук ВШЭ.

12 ноября 2016

1. На доске написаны положительные числа, среди которых не менее одного числа большего 1, не менее двух чисел больших $\frac{1}{2}$, не менее трёх чисел больших $\frac{1}{3}$, $\ldots$, не менее 1000 чисел больших $\frac{1}{1000}$. Докажите, что сумма всех чисел, записанных на доске, больше $\ln 1001$.

2. Дан конечный граф G, в котором нет индуцированных циклов длины большей, чем 3 (то есть во всяком его цикле длины 4 или более найдётся *хорда* — ребро, соединяющее две несоседние вершины цикла). Обозначим через c_k количество полных подграфов на k вершинах в G. Докажите, что $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots = 1$.

3. Докажите, что интервал $(0, 1)$ можно так покрыть системой интервалов, что каждое рациональное число покрыто конечным числом из них, а каждое иррациональное – бесконечным.

4. Обозначим через $N_m(i, j)$ количество решений уравнения
$$j = x_1^m + \ldots + x_i^m$$
в целых неотрицательных числах. Докажите, что для любых натуральных m, n выполнено
$$det(N_m(i, j))_{i,j=1}^n = 1.$$

5. Скорость течения реки равна v. Посреди реки стоит столбик O. Водомерка Сюзанна умеет двигаться со скоростью 10 см/с и хочет делать это так, чтобы в каждый момент времени заметать как можно больше ориентированной площади вокруг столбика О. Как Сюзанна должна для этого двигаться?