

Факультатив «Дополнительные главы теории вероятностей 2»

Лектор – профессор Д.А. Шабанов

Курс посвящен изучению различных вероятностных моделей, относящихся к теории случайных процессов и математической статистике. Будут рассмотрены классические модели, как с дискретным, так и непрерывным временем, а также их применения в математической статистике. От слушателей потребуются знание базового курса теории вероятностей и математической статистики (*в любом варианте*). Примерное содержание и темы курса:

1. *Марковские цепи с дискретным временем.*

Марковские цепи с дискретным временем, стационарные распределения и эргодическая теорема, классификация состояний марковской цепи, критерий возвратности состояния, задача о «разборчивой невесте» - марковский подход.

2. *Марковские цепи с непрерывным временем.*

Марковские цепи с непрерывным временем, свойства переходных вероятностей. Инфинитезимальная матрица марковской цепи. Дифференциальные уравнения Колмогорова, эргодическая теорема. Процессы размножения, проблема «ухода на бесконечность за конечное время».

3. *Энтропия.*

Энтропия случайной величины и вектора, условная энтропия, их основные свойства. Неравенство Ширера. Применение энтропии в комбинаторике: теорема Кана о числе независимых множеств в регулярном двудольном графе.

4. *Начала последовательного анализа*

Постановка задачи последовательного анализа. Построение критерия для проверки двух простых гипотез. Среднее число измерений, необходимых для различения гипотез, сравнение с классическим вариантом.

5. *Сходимость по распределению случайных процессов.*

Слабая сходимость вероятностных мер в метрических пространствах, борелевская сигма-алгебра в метрическом пространстве. Теорема Александрова. Цилиндрическая и борелевская сигма-алгебры на $C[0,1]$. Сходимость по распределению случайных процессов с непрерывными траекториями на $[0,1]$, наследование сходимости при взятии непрерывной функции. Принцип инвариантности Донскера-Прохорова (б/д).

6. *Критерий Колмогорова в математической статистике.*

Критерии согласия в непрерывном случае. Теорема Колмогорова (формулировка) и распределение Колмогорова. Доказательство первой части теоремы Колмогорова: доказательство независимости распределения статистики от вида истинной функции распределения. Критерий Колмогорова и его свойства. Лемма о сходимости статистики в теореме Колмогорова по распределению к максимуму модуля броуновского моста на $[0,1]$. Броуновский мост, его распределение как предел условных распределений винеровского процесса. Нахождение распределения максимума модуля броуновского моста с помощью перехода к случайному блужданию.