Осенняя онлайн школа
“Приложения топологии и геометрии”

Международная лаборатория
Алгебраической топологии и ее приложений
Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ
11-13 сентября 2020 г.

Аннотации лекций

Autumn online school
“Applications of topology and geometry”

International laboratory
Algebraic topology and its applications
Faculty of Computer Science, NRU HSE
September 11-13, 2020.

Abstracts

Some relations between topology and combinatorics

Mikiya Masuda
OCU (Japan), HSE (Moscow)
mikiyamsd@gmail.com

Abstract: In these three lectures, I will discuss the following three topics:

1. face numbers of simplicial polytopes and simplicial cell complexes
2. a generalization of Pick's formula and multi-polytopes
3. a metric on permutations, permutohedra, and Coxeter matroids

These are independent topics which are concerned with relations between topology (or geometry) and combinatorics. Here are some more details. First lecture (1): As is well-known, Euler's formula gives a necessary condition on the face numbers of convex polytopes. Those face numbers must satisfy more conditions, but they are not completely characterized in dimension greater than 3. However, if we restrict our concern to simplicial polytopes, then the characterization of the face numbers is known as the celebrated g-theorem, where toric geometry was used to establish the necessity condition.

The boundary of a simplicial polytope is a simplicial sphere (but the converse is not true). There is a notion called a simplicial cell complex. Roughly speaking, a simplicial cell complex is a CW complex such that the closure of each cell is a simplex. Therefore, a simplicial complex is a simplicial cell complex. I will discuss the characterization of the face numbers of simplicial cell spheres and explain how toric topology is related to the characterization.

Second lecture (2): Pick's formula expresses the area of a lattice polygon in terms of the number of lattice points on the polygon. Interestingly, this simple formula has several proofs using different mathematics such as high school mathematics, topology, complex analysis, and toric geometry. This implies that Pick's formula is a tip of iceberg, indeed there are some deep mathematics under the formula. I will discuss its generalization which leads to the notion of a multi-polytope, that is a generalization of a convex polytope.

Third lecture (3): The permutation group $\mathfrak{S}_n$ on n letters has a natural metric. Geometrically, elements of $\mathfrak{S}_n$ can be regarded as vertices of a permutohedron and then the metric on $\mathfrak{S}_n$ can be understood as the minimum number of egdes connecting vertices. A certain subset A of $\mathfrak{S}_n$ has an interesting property that any element of $\mathfrak{S}_n$ has a unique closest element in A. I will discuss how to find the closest element. It turns out that a Coxeter matroid of $\mathfrak{S}_n$ provides such a subset and it is also related to a torus orbit closure in the flag variety.

Топология свойств и действия групп

Антон Айзенберг
МЛ АТиП, ФКН НИУ ВШЭ (Москва)
ayzenberga@gmail.com

Аннотация: Можно ли алгоритмически проверить свойство ацикличности графа, не перебирая все его ребра? А можно ли быстро проверить свойство планарности графа?

Эти свойства графов являются инвариантными и монотонными вниз: они не зависят от нумерации вершин графа и наследуются подграфами. Гипотеза Аандераа–Карпа–Розенберга утверждает, что любое монотонное инвариантное свойство графа возможно проверить, лишь перебрав все возможные ребра графа. Эта общая гипотеза доказана Каном, Саксом и Стертевантом в случае, когда количество вершин графа — степень простого числа. Ключевую роль в доказательстве играют действия конечных групп на топологических пространствах.

Я планирую объяснить основные идеи и факты, стоящие за этим доказательством.

Первая лекция будет вводной: мы разберем различные свойства графов и попытаемся понять, каким образом в алгоритмических задачах возникает топология. В лекции мы обсудим понятия симплициальных комплексов и их простой гомотопической эквивалентности. Эта лекция должна быть понятна студентам, прошедшим базовый курс дискретной математики.

Вторая лекция будет более специальной. Мы обсудим основные результаты о действиях конечных групп на симплициальных комплексах: теорему Лефшеца о неподвижных точках, основы теории Смита, и я расскажу о классе групп Оливера. Для понимания лекции нужно знать, что такое симплициальные гомологии, а также иметь общее представление о группах (нужно знать, что такое нормальная подгруппа, и что такое действие группы на множестве).

В третьей лекции я объясню доказательство гипотезы Аандераа–Карпа–Розенберга для степени простого числа. Для понимания лекции желательно иметь базовое представление о конечных полях (вы имеете представление о конечных полях, если вас не смущает словосочетание “мультипликативная группа поля из p^k элементов”). Будут сформулированы вопросы для самостоятельного обдумывания.

Источники:

[1] J. Kahn, M. Saks, D. Sturtevant, *A topological approach to evasiveness*, Combinatorica 4 (1984), 297–306.

[2] H. W. Lenstra, M. R. Best, P. E. Boas, *A sharpened version of the Aanderaa-Rosenberg conjecture*, Mathematisch Centrum Amsterdam, Report 30/74 (1974).

[3] R. Oliver, *Fixed-Point Sets of Group Actions on Finite Acyclic Complexes*, Comment. Math. Helvetici 30 (1975) 155–177.

Случайные блуждания на метрических графах

Всеволод Чернышев
МЛ АТиП, ФКН НИУ ВШЭ (Москва)
vchernyshev@hse.ru

Аннотация: Лекция будет посвящена изучению случайных блужданий на метрических графах. Метрическим называется граф, в котором каждое ребро не просто какое-то отношение между вершинами, а представляет собой отрезок гладкой регулярной кривой. Соответственно, каждая точка на ребре может быть конечным положением для случайного блуждания. Выбор направления движения возможен только в вершине. Сколько может быть возможных конечных положений у такого блуждания? Я расскажу о том, как связана теорема Пика с распределением простых чисел и какое оба эти результата имеют отношение к метрическим графам.

Паттерны в песочной модели

Никита Калинин
СПбГУ, ВШЭ СПб (Санкт-Петербург)
nikaanspb@gmail.com

Аннотация: Песочная модель — основной пример самоорганизующейся критичности и простая модель для пропорционального роста. Я покажу картинки паттернов, которые возникают при релаксации небольших возмущениях максимального стабильного состояния и обсужу смежные вопросы дискретного гармонического анализа и теории чисел.

Вокруг цветной топологической теоремы Тверберга

Гаянэ Панина
ПОМИ РАН, Лаборатория Чебышева и МКН СПбГУ (Санкт-Петербург)
gaiane-panina@rambler.ru

Аннотация: Возьмите теорему Радона (всякое множество из $d+2$ точек d-мерного пространства может быть разделено на два непересекающихся подмножества, чьи выпуклые оболочки пересекаются), потребуйте бо́льшей кратности пересечения, ослабьте аффинный вариант до произвольного непрерывного, добавьте цвета — получится цветная топологическая теорема Тверберга. Ожидаемо, что требуя больше, придется дополнительно заплатить. Интересно, что добавление цветов бесплатно.

У этой теоремы есть два доказательства – первое (Благоевич, Циглер, Матшке), через эквивариантные препятствия, и вторoe (Вречица, Живалевич) – через степень эквивариантных отображений.

Я расскажу оба доказательства, покажу один остроумный комбинаторный прием, много где работающий в задачах "типа Тверберга" и представлю один совсем новый результат (Йойич, Живалевич, П.)

Основы прикладной топологии

Федор Павутницкий
МЛ АТиП, ФКН НИУ ВШЭ (Москва), Лаборатория Чебышева СПбГУ
(Санкт-Петербург)
fedor.pavutnitskiy@gmail.com

Аннотация:

1. Введение в персистентные гомологии.

При рассмотрении гомологий фильтрованного симплициального комплекса, естественным образом возникает понятие персистентности. В первой части лекции мы обсудим его строгое алгебраическое определение и теорему об интервальном разложении персистентного модуля. Во второй, более прикладной части, предлагается рассмотреть типичные примеры фильтрованных комплексов, возникающих при рассмотрении облаков данных в $\mathbb{R}^n$ а также наглядные представления персистентных гомологий в виде баркодов и персистентных диаграмм.

2. Mapper — алгоритм топологического анализа данных.

Часто для выявления структур и закономерностей в данных высокой размерности бывает полезным их маломерное представление. Алгоритм Mapper строит подобное представление данных в форме раскрашенного графа с дополнительной структурой. Мы разберем последовательное построение этого графа, важность выбора фильтр-функции и рассмотрим некоторые примеры удачного применения Mapper'а.

An introduction into Ollivier Ricci curvature

Norbert Peyerimhoff
Durham University (England)
norbert.peyerimhoff@durham.ac.uk

Abstract: Yann Ollivier proposed in 2009 a curvature notion for Markov chains on metric spaces, based on optimal transport of probability measures associated to a random walk. In the special setting of graphs, this concept provides a curvature notion on the edges and depends on an idleness parameter of the random walk. Interestingly, there are many

publications covering various practical applications of this curvature notion ranging from cancer research to the internet topology. In this talk, I will motivate and introduce this notion and discuss some specific properties of Ollivier Ricci curvature.

Шеллинг полиэдральных, симплициальных и матроидных комплексов

Григорий Соломадин
МИ им. Никольского, РУДН (Москва)
grigory.solomadin@gmail.com

Аннотация: Идея специального упорядочения (шеллинга) гиперграней выпуклого многогранника в $\mathbb{R}^n$ возникла в работе Шлёфли 1901 года при доказательстве формулы Эйлера-Шлёфли для его границы. В работах XX века Фюрч, Бинг, Рудин и другие построили различные примеры PL-клеток, не допускающих шеллинг. В 1971 году Брюггессер и Мани привели изящную конструкцию для подобного упорядочения на граничном комплексе выпуклого многогранника. Замечательные свойства шеллинговых симплициальных комплексов привели к появлению дальнейших приложений этого понятия в коммутативной алгебре и геометрической комбинаторике. Для специального класса матроидных симплициальных комплексов лексикографическое упорядочение максимальных симплексов, индуцированное любым порядком на множестве вершин, является шеллингом. Это условие выделяет матроиды среди всех симплициальных комплексов, так как в общем случае задача существования шеллинга является сложной (NP-полной). В ходе часовой лекции я постараюсь дать краткий обзор базовой теории шеллинга и матроидов. Все определения будут даны в ходе лекции, предварительных знаний не требуется.

Self-dual binary codes from small covers and simple polytopes

Li Yu
Nanjing University (China)
yuli@nju.edu.cn

(This lecture is based on a joint work [5] of the speaker with Bo Chen and Zhi Lü)

Abstract: In the first part of the lecture, we will first explain some basic notions of binary codes. Then we explain a general method (invented by V. Puppe [9]) of constructing self-dual binary codes from the equivariant cohomology of closed manifolds with some specical

involutions. It turns out that any self-dual binary code can be obtained in this way (proved by Kreck–Puppe [8]).

In the second part of the lecture, we explore the connection between simple polytopes and self-dual binary codes via the theory of small covers. These are important class of closed manifolds occurring in toric topology. We will first show that a small cover M^n over a simple n-polytope P^n produces a self-dual binary code through the method of Puppe if and only if P^n is n-colorable and n is odd. These self-dual binary codes can be described by the combinatorics of P^n. Moreover, we construct a family of binary linear codes $\mathfrak{B}_k(P^n)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, for a general simple n-polytope P^n and discuss when $\mathfrak{B}_k(P^n)$ is self-dual.

A spinoff of our investigation gives us some new ways to judge whether a simple n-polytope P^n is n-colorable in terms of the associated binary codes $\mathfrak{B}_k(P^n)$. In addition, we discuss some applications to doubly-even binary codes.

References:

[1] C. Allday and V. Puppe, *Cohomological methods in transformation groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. **32**. Cambridge University Press, London (1993).

[2] A. Brøndsted, *An introduction to convex polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, 90, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[3] V. Buchstaber and T. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture Series, vol. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[4] B. Chen and Z. Lü, *Equivariant cohomology and analytic descriptions of ring isomorphisms*, Math. Z. **261** (2009), No. 4, 891–908.

[5] B. Chen, Z. Lü and L. Yu, Self-dual binary codes from small covers and simple polytopes, Algebraic & Geometric Topology **18** (2018), No. 5, 2729–2767.

[6] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus Actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417–451.

[7] M. Joswig, *Projectivities in simplicial complexes and colorings of simple polytopes*, Math. Z. **240** (2002), no. 2, 243–259.

[8] M. Kreck and V. Puppe, *Involutions on 3-manifolds and self-dual binary codes*, Homology, Homotopy Appl. 10 (2008), no. **2**, 139–148.

[9] V. Puppe, *Group actions and codes.* Can. J. Math. 153, 212–224 (2001).

[10] E. M. Rains and N.J. Sloane, *Self-dual codes*, Handbook of coding theory, Vol. I, II, 177–294, North-Holland, Amsterdam, 1998.

Generalized Tonnetz

Rade T. Živaljević
Mathematical institute SASA (Belgrade)
rade@mi.sanu.ac.rs

Abstract: In his seminal work on music theory *"Tentamen novae theoriae musicae ex certissismis harmoniae principiis dilucide expositae"* (1739), Leonhard Euler introduced a lattice diagram – *Tonnetz* – representing the classical tonal space. In more recent interpretations this diagram is identified as a triangulation of a torus with 24 triangles representing all the major and minor traids. Motivated by Euler's *Tonnetz*, we introduce and study the

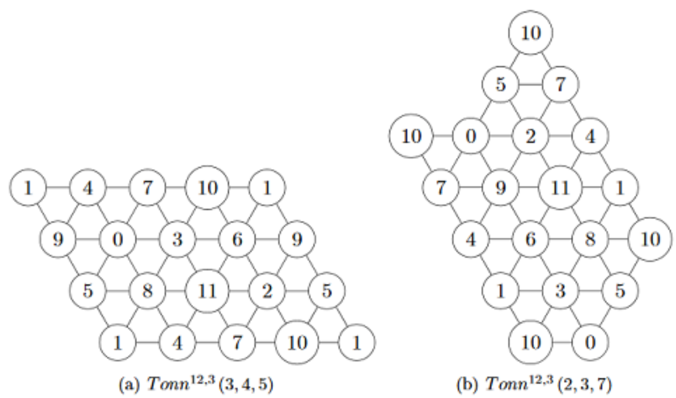

Figure 1: Combinatorially non-isomorphic complexes of Tonnetz type.

combinatorics and topology of more general simplicial complexes $Tonn^{n,k}(L)$ of *Tonnetz type*. We will show that for a sufficiently generic choice of parameters the generalized tonnetz $Tonn^{n,k}(L)$ is a triangulation of a $(k-1)$-dimensional torus T^{k-1}. In the proof we construct and use the properties of a *discrete Abel-Jacobi map*, which takes values in the torus $T^{k-1} \cong \mathbb{R}^{k-1}/\Lambda$ where $\Lambda \cong \mathbb{A}^*_{k-1}$ is the permutohedral lattice.

Key words and phrases: Simplicial covering spaces, simplicial (co)homology, permutohedron, affine Weyl group, minimal triangulations, sphere packings and lattices.

References:

[1] M. J. Catanzaro, *Generalized Tonnetze*, J. Math. Music **5** (2011), 117–139.

[2] F. D. Jevtić, R. T. Živaljević. Generalized Tonnetz and discrete Abel-Jacobi map, arXiv:2002.09184 [math.MG].

[3] `https://lecompositeur.com/theorie/cycle-des-quintes-en-3d-introduction-au-tonnetz`
`https://www.youtube.com/watch?v=nidHgLA2UB0`, etc.