III осенняя математическая олимпиада
Факультета компьютерных наук ВШЭ.
II-IV курс

21 сентября 2020, 17:30 – 20:30

Уважаемые участники! Вопросы по условию принимаются в течение первого часа соревнования, то есть с 17:30 до 18:30 на электронную почту olimpfak@gmail.com

Официальное время окончания работы 20:30 (московское время). Далее даётся 10 мин. для ОТПРАВКИ решения (т.е. оформлять решение в это время уже запрещено, пишущие принадлежности должны быть отложены в сторону). При нарушении этого регламента более чем на 5 минут жюри может, на своё усмотрение, перевести работу участников в раздел "вне конкурса".

1. Найдите площадь точечного множества $A = \{(x, y) \mid 1 \leqslant x \leqslant e, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ на декартовой плоскости, где

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ln x & 2\ln x & 3\ln x & 4\ln x \\ (\ln x)^2 & 4(\ln x)^2 & 9(\ln x)^2 & 16(\ln x)^2 \\ (\ln x)^3 & 8(\ln x)^3 & 27(\ln x)^3 & 64(\ln x)^3 \end{vmatrix}$$

2. Пусть линейное преобразование A вещественного n-мерного векторного пространства имеет такие $n+1$ собственных векторов, что любые n из них линейно независимы. Обязательно ли при этом A является пропорциональным тождественному преобразованию (т.е. с матрицей равной единичной матрице умноженной на скалярный коэффициент)?

3. Просуммируйте:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m^2 n}{3^m(n3^m + m3^n)}$$

4. Для всякого натурального n обозначим через r_n минимальное значение выражения $|c - d\sqrt{3}|$ среди таких неотрицательных целых c и d, что $c + d = n$. Найдите точную верхнюю грань численного множества $\{r_n\}$.

5. Пусть заданы такие квадратные матрицы A, B и C размера $n \times n$, что $A^3 = -I$ (I тут обозначает единичную матрицу), а также $BA^2 + BA = C^6 + C + I$, и C симметрична. Возможно ли, что при этом $n = 2021$?