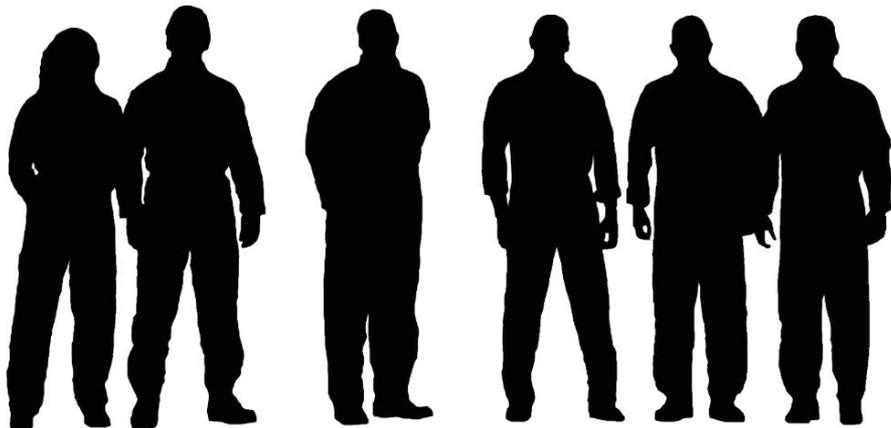


# Устойчивое разбиение на коалиции

Stable partition into coalitions



Факультет  
компьютерных  
наук



**Буклей Григорий**

научно-учебная лаборатория  
моделирования и управления  
сложными системами

Научный руководитель:  
**Шаповал Александр Борисович**

профессор факультета  
компьютерных наук, д-р физ.-мат.  
наук, департамент больших данных  
и информационного поиска

# Примеры задач

---



где построить новую  
больницу

# Примеры задач

---



где построить новую  
больницу



какой пункт вставить в  
предвыборную программу

# Примеры задач



где построить новую  
больницу

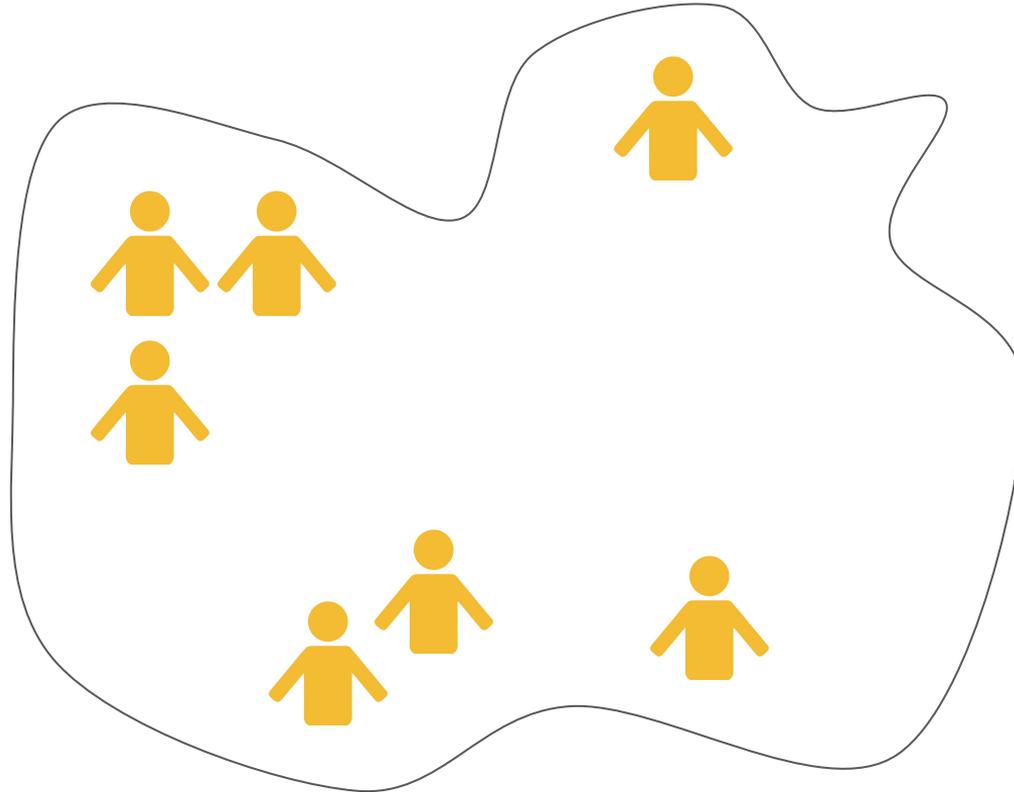


какой пункт вставить в  
предвыборную программу



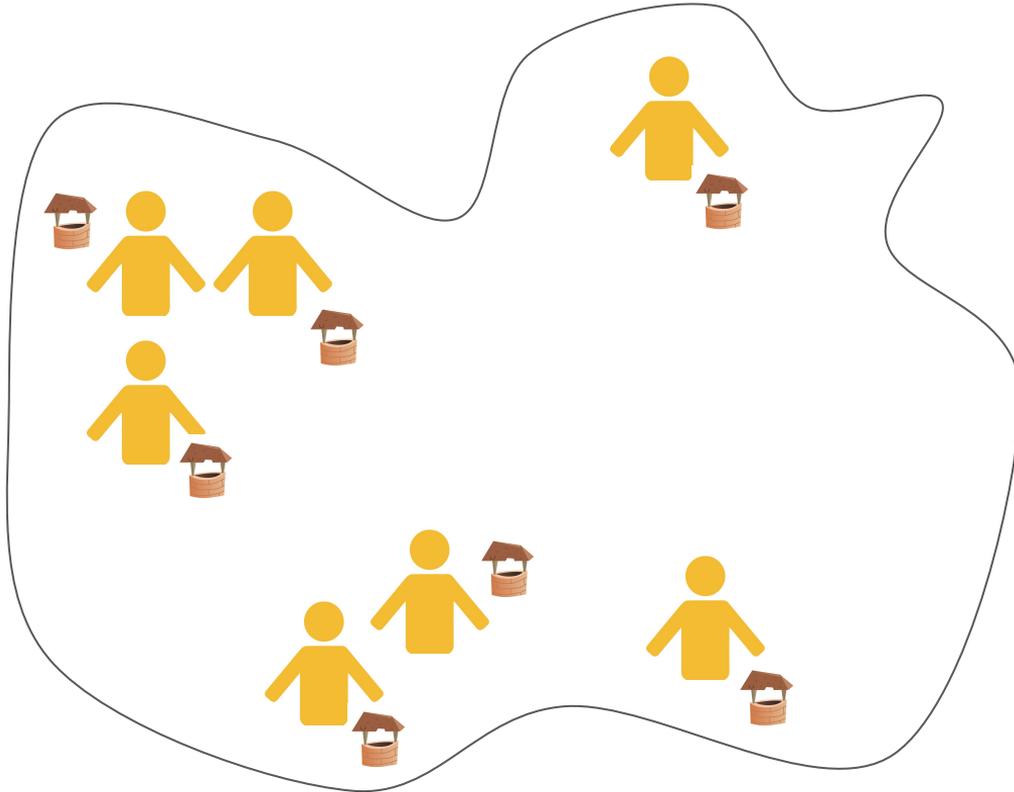
за кого голосовать на  
выборах

# Задача о колодце



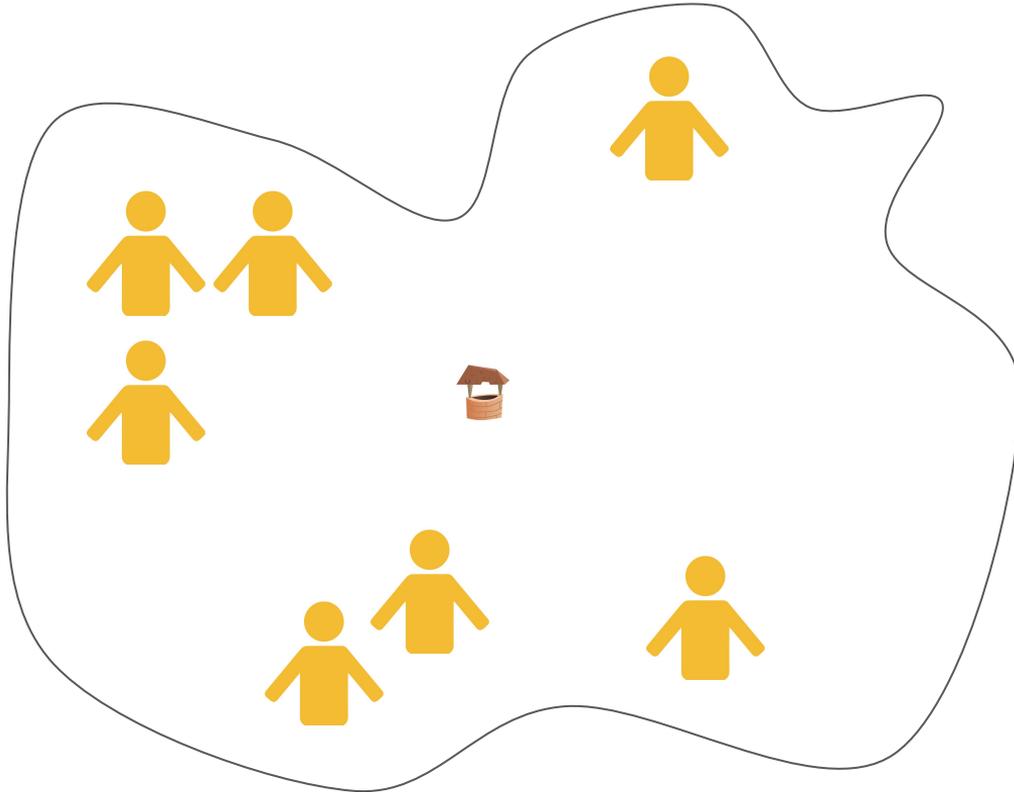
Есть группа людей, каждый хочет доступ к какому-то благу, например, колодцу

# Задача о колодце



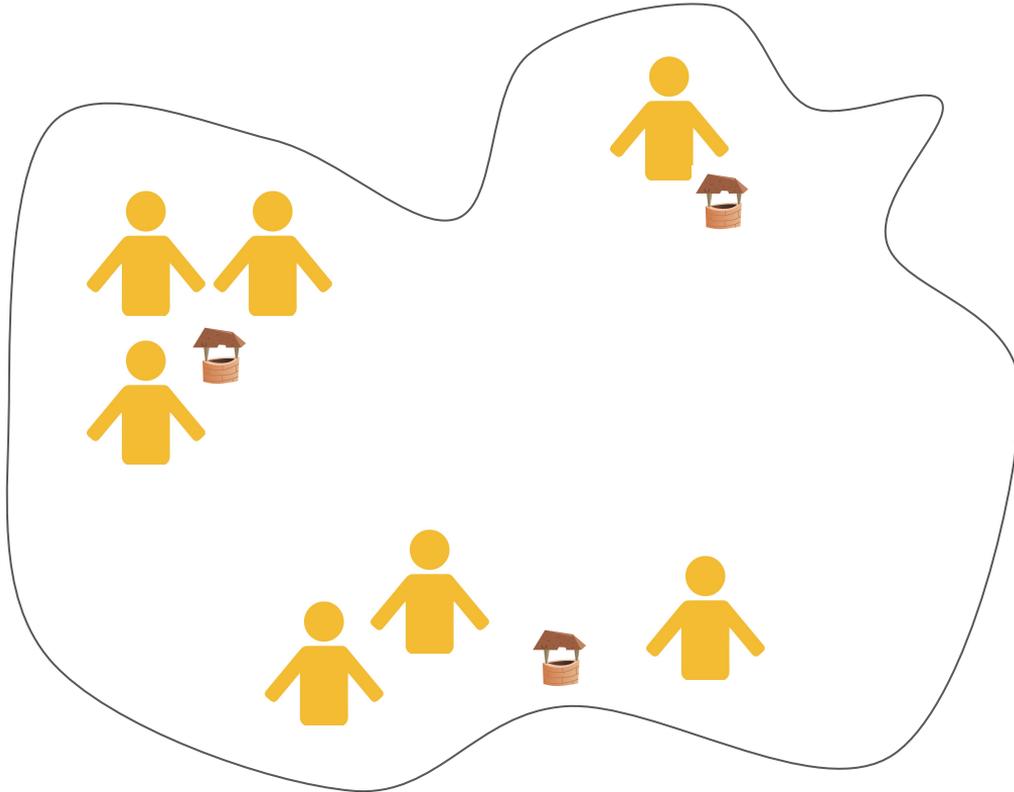
Можно построить колодец около каждого, но это дорого

# Задача о колодце



Можно построить один колодец,  
но тогда далеко ходить

# Задача о колодце



Балансируем между издержками на постройку колодца и транспортными

# Развитие теории



1997

Alesina A., Spolaore E. On the Number and Size of Nations

# Развитие теории



1997

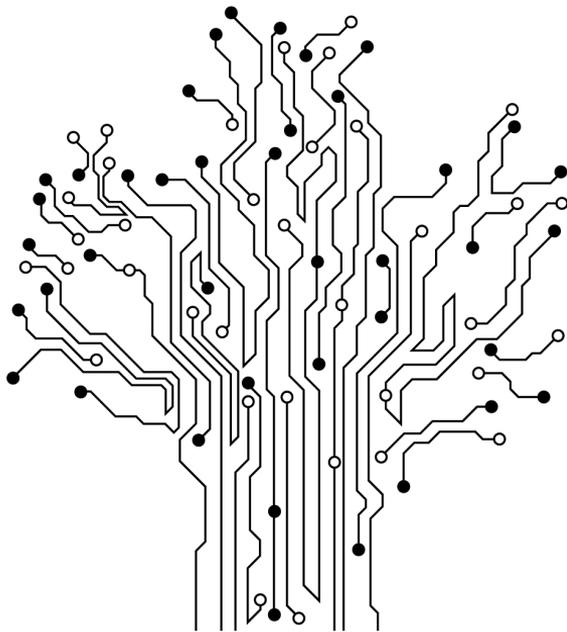
Alesina A., Spolaore E. On the Number and Size of Nations

2013

Савватеев А.В. Задача многомерного размещения и ее приложения

# Модель

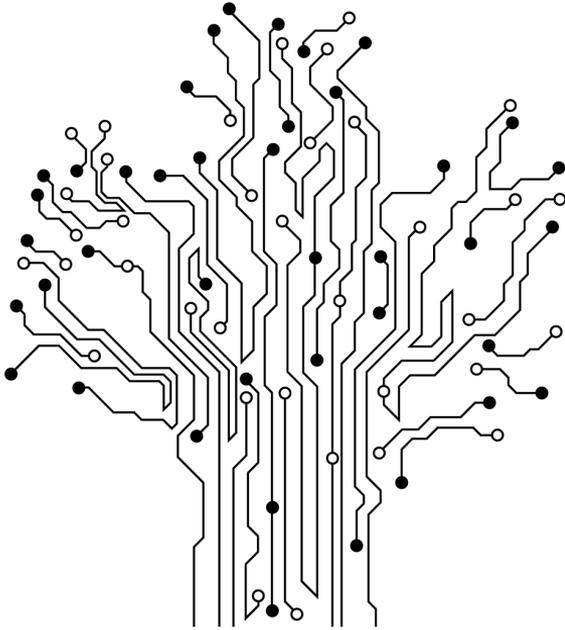
Цель: понять, есть ли устойчивое разбиение на коалиции



- Коалиционная устойчивость
  - никакая группа не имеет выгоды отделиться

# Модель

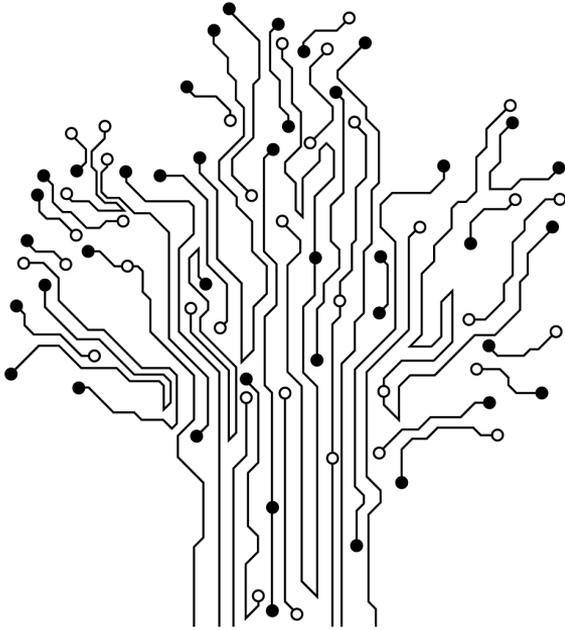
Цель: понять, есть ли устойчивое разбиение на коалиции



- Коалиционная устойчивость
  - никакая группа не имеет выгоды отделиться
- Агентов можно расположить на прямой или ее части
  - общее благо на месте среднего (медиана)
  - распределение задается функцией плотности

# Модель

Цель: понять, есть ли устойчивое разбиение на коалиции



- Коалиционная устойчивость
  - никакая группа не имеет выгоды отделиться
- Агентов можно расположить на прямой или ее части
  - общее благо на месте среднего (медиана)
  - распределение задается функцией плотности
- Внутри коалиции все несут равные издержки

# Развитие теории



1997

Alesina A., Spolaore E. On the Number and Size of Nations

2013

Савватеев А.В. Задача многомерного размещения и ее приложения

1974

Aumann R. J. Cooperative games with coalition structure

# Развитие теории



1997

Alesina A., Spolaore E. On the Number and Size of Nations

2013

Савватеев А.В. Задача многомерного размещения и ее приложения

1974

Aumann R. J. Cooperative games with coalition structure

2017

Вебер Ш., Мусатов Д. В., Савватеев А. В., Шаповал А. Б. Коалиционно устойчивые разбиения на юрисдикции при монотонно убывающей плотности населения

# Модель

Цель: понять, есть ли устойчивое разбиение на коалиции

агенты живут на  $\Omega = [0; +\infty]$  /  $\Omega = [0; R]$

$f_{>0}$  -- плотность населения

$\int_S f(x)dx$  -- размер юрисдикции S

# Модель

Цель: понять, есть ли устойчивое разбиение на коалиции

агенты живут на  $\Omega = [0; +\infty]$  /  $\Omega = [0; R]$

$f_{>0}$  -- плотность населения

$\int_S f(x)dx$  -- размер юрисдикции S

Издержки:

$$\frac{1}{\int_S f(x)dx}$$

коалиционные

# Модель

Цель: понять, есть ли устойчивое разбиение на коалиции

агенты живут на  $\Omega = [0; +\infty]$  /  $\Omega = [0; R]$

$f_{>0}$  -- плотность населения

$\int_S f(x)dx$  -- размер юрисдикции  $S$

Издержки:

$$\frac{1}{\int_S f(x)dx} + |x - med(S)|$$

коалиционные

транспортные

# Модель

Цель: понять, есть ли устойчивое разбиение на коалиции

агенты живут на  $\Omega = [0; +\infty]$  /  $\Omega = [0; R]$

$f_{>0}$  -- плотность населения

$\int_S f(x)dx$  -- размер юрисдикции  $S$

Издержки:

$$\frac{1}{\int_S f(x)dx} + |x - med(S)|$$

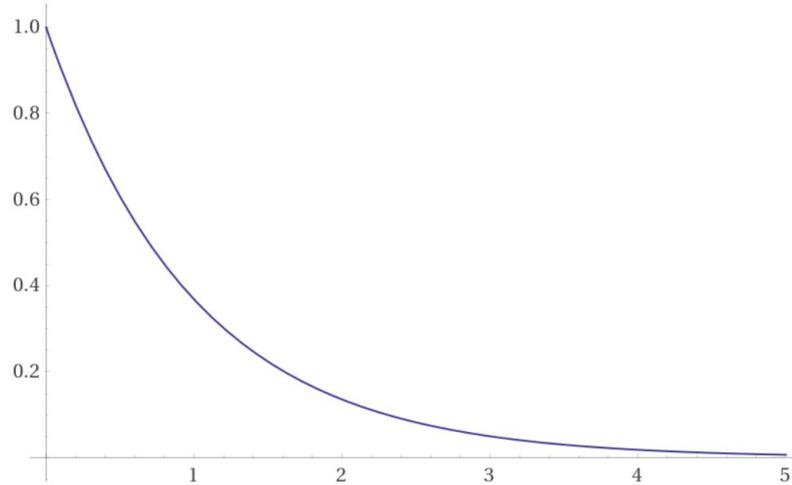
коалиционные

транспортные

**Теорема.** Пусть плотность населения  $f$  на  $\Omega = [0; +\infty)$  строго положительна, непрерывна, нестрого убывает и удовлетворяет условию «плавного» убывания  $|f'(x)| < 2\sqrt{2}f(x)^{3/2}$ . Тогда существует разбиение  $\Omega$  на юрисдикции, устойчивое в коалиционном смысле. Более того, эти юрисдикции связны, т.е. представляют собой отрезки

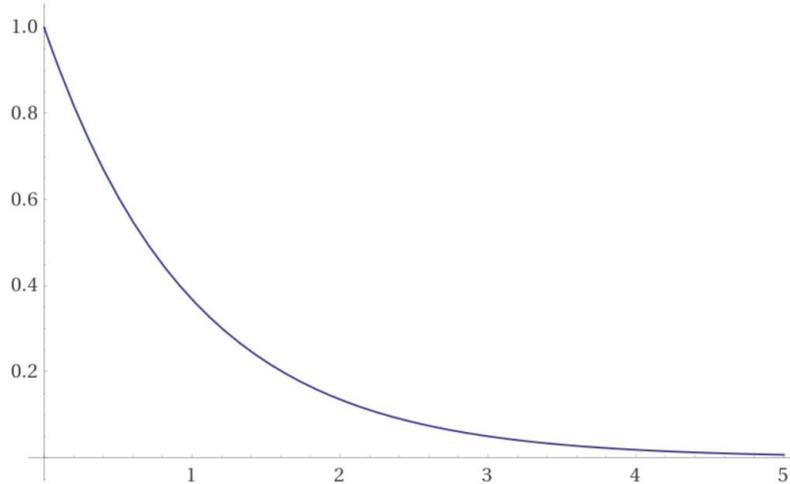
(2017)

# Экспоненциальная плотность



- Не выполняется условие «плавного» убывания

# Экспоненциальная плотность



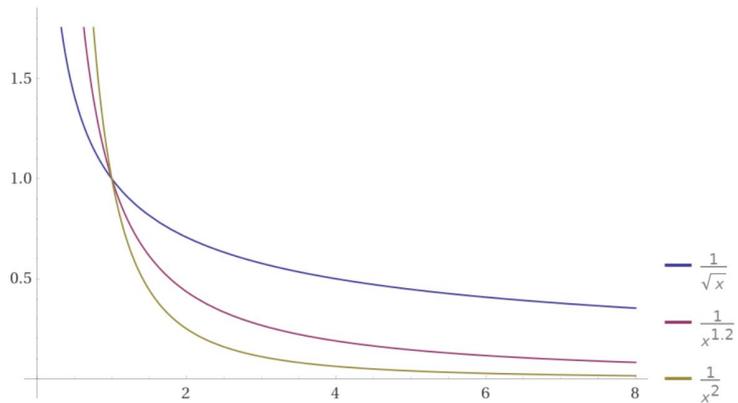
- Не выполняется условие «плавного» убывания
- Существует устойчивое разбиение

# Степенная плотность



$$\frac{1}{x^\alpha}$$

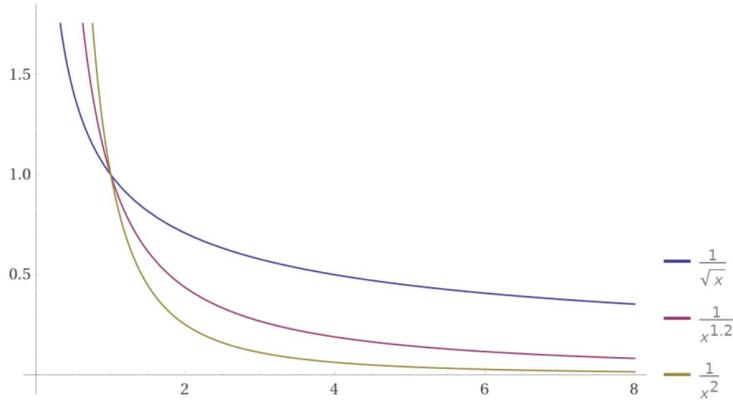
# Степенная плотность



$$\frac{1}{x^\alpha}$$

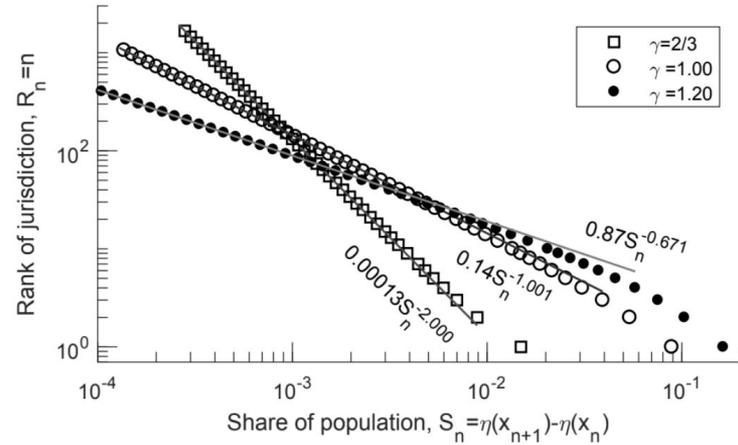
график плотности при степенном распределении

# Степенная плотность

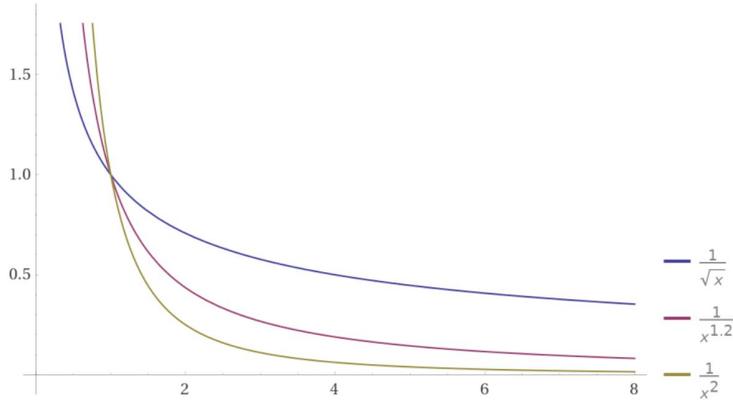


$$\frac{1}{x^\alpha}$$

график плотности при степенном распределении



# Степенная плотность



$$\frac{1}{x^\alpha}$$

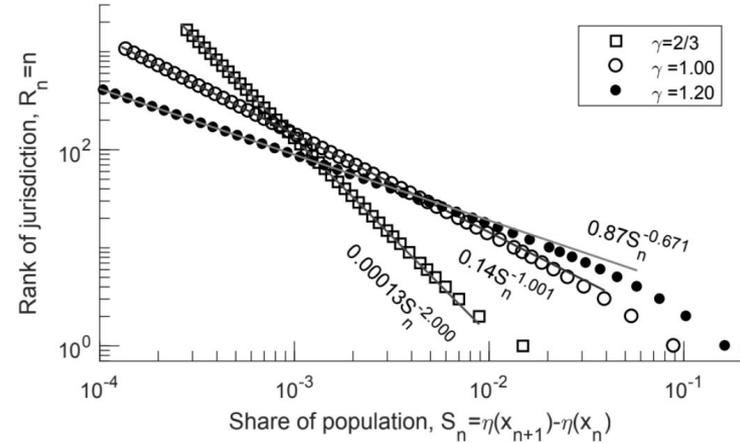
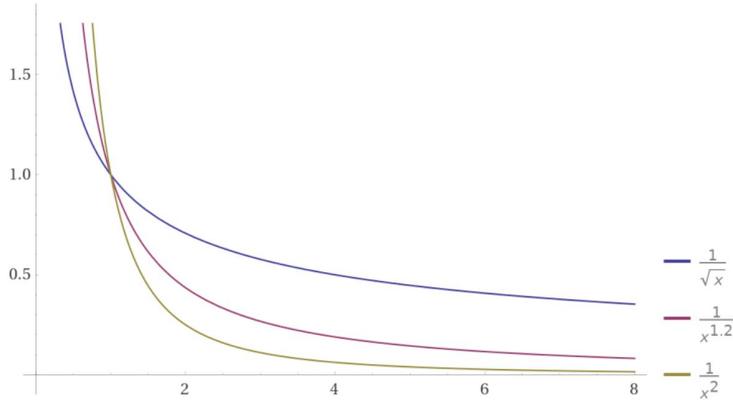


график плотности при степенном распределении

- Не выполняется условие «плавного» убывания в нуле

# Степенная плотность



$$\frac{1}{x^\alpha}$$

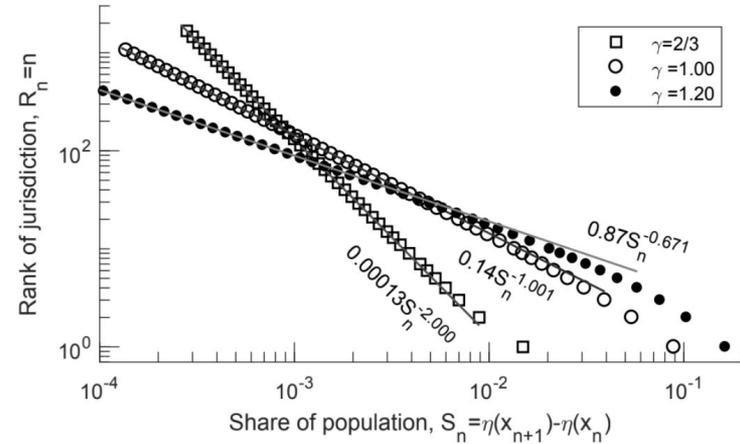
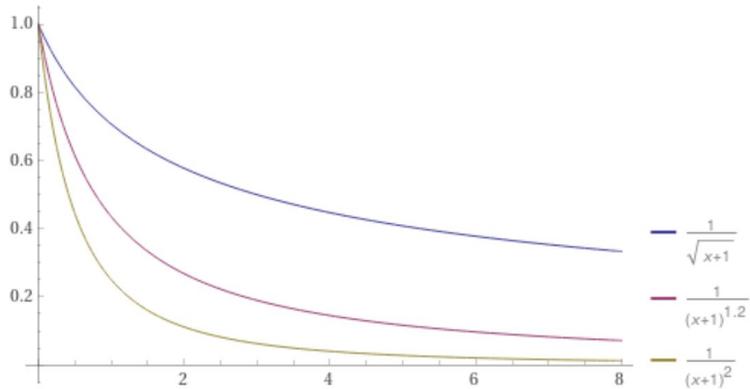
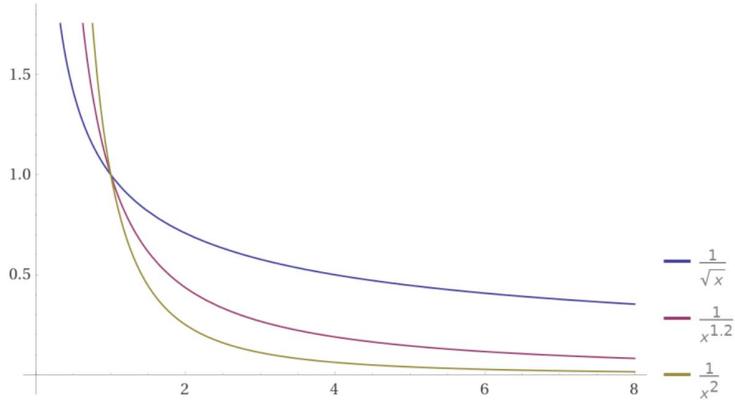


график плотности при степенном распределении



- Не выполняется условие «плавного» убывания в нуле

# Степенная плотность



$$\frac{1}{x^\alpha}$$

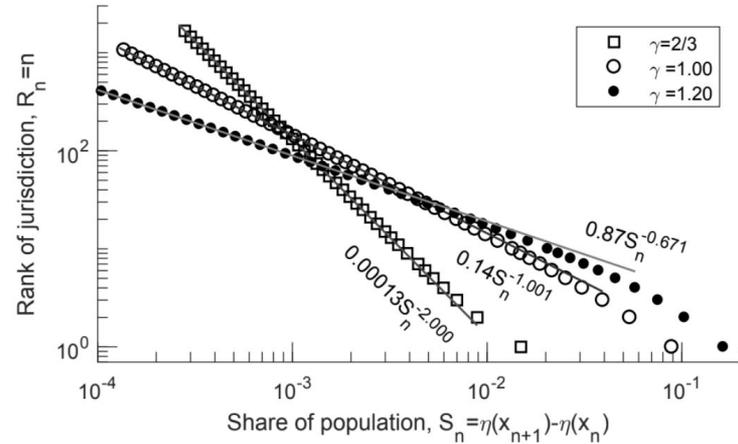
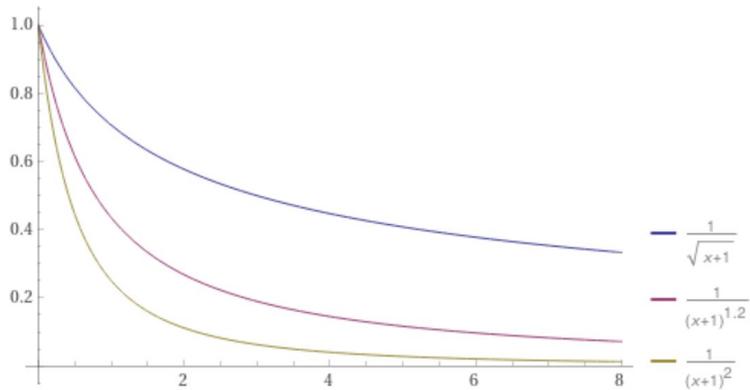


график плотности при степенном распределении



- Не выполняется условие «плавного» убывания в нуле
- После сдвига выполняется при  $\alpha < 2$



**Спасибо за внимание!**



# Литература



- Alesina A. On the Number and Size of Nations / A. Alesina, E. Spolaore // Quarterly Journal of Economics. – 1997. – Vol. 112. – P. 1027–1056.
- Aumann R. J. Cooperative games with coalition structure / R. J. Aumann, J. H. Drize // International Journal of Game Theory. – 1974. – Vol. 3. – P. 217–237.
- Вебер Ш., Мусатов Д. В., Савватеев А. В., Шаповал А. Б. Коалиционно устойчивые разбиения на юрисдикции при монотонно убывающей плотности населения // Вестник ВГУ. Серия: Экономика и управление. 2017. № 4. – стр. 199-146
- Савватеев А. В. Задача многомерного размещения и ее приложения: теоретико-игровой подход : дисс. д-ра физ.-мат. наук / А. В. Савватеев. – М. : ЦЭМИ, 2013.