Open Spring university Students Mathematical Competition 2021
Факультета компьютерных наук ВШЭ.

23 мая 2021, 10:00 – 14:00

1. Обозначим d-мерный куб как $\mathcal{C}$. Этот куб разделили на 2^d прямоугольных параллелепипедов при помощи d гиперплоскостей π_i, каждая из которых перпендикулярна некоторому ребру куба $\mathcal{C}$, при этом все π_i попарно не параллельны друг другу. Полученные маленькие параллелепипеды раскрасили в два цвета в шахматном порядке (то есть так, что любые два параллелепипеда соседние по общей гиперграни покрашены в разные цвета). Оказалось, что сумма объёмов чёрных параллелепипедов равна сумме объёмов белых параллелепипедов. Докажите, что хотя бы одна из плоскостей π_i делит $\mathcal{C}$ на две равные части.

2. Дана ограниченная дифференцируемая функция $f : [0, +\infty)$ для которой выполнено $f(x)f'(x) \geqslant \sin(x)$ для любого x из области определения. Может ли существовать предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

3. Даны натуральное число n и $2021n$ выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$. Оказалось, что пересечение этих множеств можно накрыть полосой с шириной 1. Докажите, что из этих компактов можно выбрать $2n$ таким образом, что их пересечение тоже можно накрыть полосой с шириной 1.
   Комментарии. Компакт в $\mathbb{R}^n$ – это замкнутое и ограниченное множество. Полосой в $\mathbb{R}^n$ называется часть пространства между двумя параллельными гиперплоскостями. Множество A накрывает множество B означает, что B является подмножеством A ($B \subset A$). Ширина полосы – расстяние между ограничивающими её гиперплоскостями.

4. Элементы конечной коммутативной группы G покрашены в три цвета: жёлтый, синий и красный, причём элементов каждого цвета не более половины $|G|$. Пусть A – множество (упорядоченных) четвёрок таких одноцветных элементов (x, y, z, t) группы G, что $xyzt = e$, где e – единичный элемент группы. Пусть B – множество (упорядоченных) четвёрок (x, y, z, t) группы G таких, что x и y имеют один цвет, а также z и t имеют один цвет, но эти два цвета различны между собой, и при этом также выполнено $xyzt = e$. Докажите, что $|A| \leqslant |B|$.

5. Дана матрица $n \times n$ с вещественными элементами. Известно, что первые k строк являются единичными по длине и ортогональными друг другу n-мерными векторами, а также первые l столбцов являются являются единичными по длине и ортогональными друг другу n-мерными векторами. Докажите, что можно так изменить не вошедшие в эти строки и стобцы элементы матрицы, чтобы она стала ортогональной.