Sirius
Mathematics Center

006s: Toric Topology and Combinatorics

November 1-5 | 2021

Научно-технологический университет «Сириус»
Математический центр
Высшая школа экономики
Международная лаборатория алгебраической топологии и ее приложений

Международная научная школа

Торическая топология и комбинаторика

1–5 ноября 2021 г.

Программа и аннотации лекций

Сириус
2021

ПРОГРАММА ШКОЛЫ

ПОНЕДЕЛЬНИК 1 НОЯБРЯ

ЗАВТРАК

09^{30} — 10^{30} Бухштабер В.М. *Фуллерены и комбинаторика многогранников.*

10^{45} — 11^{45} Masuda M. *Introduction to Hessenberg varieties.*

ПЕРЕРЫВ

12^{15} — 13^{15} Айзенберг А.А. *Введение в алгебры Стенли–Райснера.*

ОБЕД

14^{45} — 15^{45} Ландо С.К. *Lie algebras weight systems and graph invariants – I.*

16^{00} — 17^{00} Хованский А.Г. *Generalized virtual polyhedra and cohomology of torus manifold.*

ПЕРЕРЫВ

17^{30} — 18^{30} *Практические занятия.* «Толстой»+Переговорные

18^{30} — 19^{00} *Самостоятельная работа.* «Толстой»+Переговорные

УЖИН

ВТОРНИК 2 НОЯБРЯ

ЗАВТРАК

09^{30} — 10^{30} Купавский А.Б. *VC-размерность d-мерных многогранников с k вершинами – I.*

10^{45} — 11^{45} Полянский А.А. *Комбинаторика выпуклости – I.*

ПЕРЕРЫВ

12^{15} — 13^{15} Шабанов Д.А. *Пороговые вероятности в случайных дискретных структурах.*

ОБЕД

14^{45} — 15^{45} Мусин О.Р. *Избранные задачи топологической комбинаторики – I.*

16^{00} — 17^{00} Долбилин Н.П. *Многогранники и тайлинги.*

ПЕРЕРЫВ

17^{30} — 18^{30} *Практические занятия.* «Толстой»+Переговорные

18^{30} — 19^{00} *Самостоятельная работа.* «Толстой»+Переговорные

УЖИН

СРЕДА 3 НОЯБРЯ

ЗАВТРАК

09^{30} — 10^{30} Бухштабер В.М. *Геометрия Лобачевского и проблема четырёх красок.*

10^{45} — 11^{45} Masuda M. *GKM graph and S_n-actions on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties.*

ПЕРЕРЫВ

12^{15} — 13^{15} Панов Т.Е. *Слоения, происходящие из конфигураций векторов, двойственность Гейла и момент-угол-многообразия – I.*

ОБЕД

14^{45} — 15^{15} Айзенберг А.А. *Введение в алгебры Стенли–Райснера.*

15^{15} — 17^{00} *Практические занятия.* «Толстой»+Переговорные

ПЕРЕРЫВ

17^{30} — 18^{15} *Практические занятия.* «Толстой»+Переговорные

18^{15} — 19^{00} *Самостоятельная работа.* «Толстой»+Переговорные

УЖИН

ЧЕТВЕРГ 4 НОЯБРЯ

ЗАВТРАК

09^{30} — 10^{30} Купавский А.Б. *VC-размерность d-мерных многогранников с k вершинами – II.*

10^{45} — 11^{45} Полянский А.А. *Комбинаторика выпуклости – II.*

ПЕРЕРЫВ

12^{15} — 13^{15} Шабанов Д.А. *Алгоритмические барьеры в теории случайных графов и гиперграфов.*

ОБЕД

14^{45} — 15^{45} Мусин О.Р. *Избранные задачи топологической комбинаторики – II.*

16^{00} — 17^{00} Ландо С.К. *Lie algebras weight systems and graph invariants – II.*

ПЕРЕРЫВ

17^{30} — 18^{30} *Практические занятия.* «Толстой»+Переговорные

18^{30} — 19^{00} *Самостоятельная работа.* «Толстой»+Переговорные

УЖИН

ПЯТНИЦА 5 НОЯБРЯ

ЗАВТРАК

09^{30} — 10^{30} Бухштабер В.М. *Торическая топология и её приложения.*

10^{45} — 11^{45} Masuda M. *Chromatic symmetric functions and the Stanley–Stembridge conjecture.*

ПЕРЕРЫВ

12^{15} — 13^{15} Мусин О.Р. *Избранные задачи топологической комбинаторики – III.*

ОБЕД

14^{45} — 15^{45} Панов Т.Е. *Слоения, происходящие из конфигураций векторов, двойственность Гейла и момент-угол-многообразия – II.*

16^{00} — 17^{00} *Практические занятия.* «Толстой»+Переговорные

ПЕРЕРЫВ

17^{30} — 18^{30} *Практические занятия.* «Толстой»+Переговорные

18^{30} — 19^{00} *Подведение итогов школы.* «Толстой»+Переговорные

УЖИН

Введение в алгебры Стенли-Райснера

Антон Андреевич Айзенберг
НИУ ВШЭ (Москва, Россия)
ayzenberga@gmail.com

Abstract: Алгебры Стенли–Райснера — мощный инструмент алгебраической комбинаторики. Исторически они возникли как средство перевода задач о триангуляциях сфер и комбинаторики многогранников на язык коммутативной и гомологической алгебры. С помощью алгебр Стенли–Райснера были доказаны два важных результата о триангуляциях n-мерных сфер: теорема о нижней границе и теорема о верхней границе. Алгебры Стенли–Райснера стали важным инструментом торической геометрии и топологии. На лекции я расскажу самое общее введение в эту тему, а технические подробности слушатели смогут дополнить, работая самостоятельно.

Многогранники и тайлинги

Николай Петрович Долбилин
МИАН им.В.А.Стеклова (Москва, Россия)
dolbilin@mi-ras.ru

Abstract: Тайлинг (другие термины: разбиение пространства на многогранники, паркет, замощение пространства) – это совокупность многогранников, которые заполняют пространство без пропусков и попарных перекрытий. Тайлинги находят применение в вычислительной геометрии и компьютерной графике, в геометрии и кристаллографии и т.п. Один из центральных вопросов теории тайлингов — какие многогранники являются монотайлами, то есть заполняют пространство конгруэнтными копиями — интересовал еще Аристотеля, который при этом ошибочно полагал, правильный тетраэдр является монотайлом.

Проблема описания строения монотайлов решается лишь в редких случаях при наличии серьезных дополнительных ограничений. Наибольший прогресс был достигнут в случае, когда копии монотайла параллельны друг другу, в работах Минковского, Вороного, Делоне, Венкова и др. Исследование таких монотайлов (т.н. параллелоэдров тесно связано с общей теорией выпуклых многогранников (в частности, теорема Минковского о существовании и единственности выпуклого многогранника с заданными направлениями и объемами его гиперграней) и геометрией чисел (теорией решеток).

Однако о монотайлах произвольного вида известно немного. Например, не известно, существует ли оценка для числа граней у трехмерных монотоайлов ('killer problem').

Все необходимые сведения будут приведены в лекции.

Фуллерены, геометрия Лобачевского и торическая топология

Виктор Матвеевич Бухштабер
МИАН им.В.А.Стеклова и НИУ ВШЭ (Москва, Россия)
buchstab@mi-ras.ru

На школе будут прочитаны три лекции.

Лекция I: Fullerenes and combinatorics of polytopes

Abstract: This lecture is devoted to mathematical problems concerning the following carbon molecular structures:

- fullerenes (buckminsterfullerene C_{60}, was prepared in 1985),
- nanotubes (the first macroscopic production was made in 1992),
- grafenes (first measurably produced and isolated in the lab in 2003,
- nonobuds (a material discovered and synthesized in 2006).

At that moment the problem of mathematical classification of such carbon molecular structures is well-known and is vital due to applications in chemistry, physics, biology and nanotechnology.

Лекция II: Lobachevsky's geometry and the four color problem

Abstract: In this lecture, we will discuss the amazing and fundamental connections of the mathematical theory of fullerenes and the combinatorics of three-dimensional polytopes with:

- the special theory of relativity,
- the Lobachevsky's geometry,
- the four color problem,
- the theory of Coxeter groups,
- classical and modern problems of graph theory.

Лекция III: Toric topology and its applications

Abstract: The study of torus actions on topological spaces has been considered as a classical field of algebraic topology. Specific problems connected with torus actions arise in different areas of mathematics and mathematical physics, which results in permanent interest in the theory, new applications and penetration of new ideas into topology.

This lecture is an introduction to a new direction of research (see "Toric Topology", N 57S12 in AMS Mathematics Subject Classification, 2020). This direction has been formed over the past 25 years thanks to new connections of toric actions with:

- algebraic geometry,
- combinatorics of polyhedra,
- homological algebra.

VC-размерность d-мерных многогранников с k вершинами

Андрей Борисович Купавский
МФТИ (Москва, Россия)
kupavskii@ya.ru

Abstract:
VC-размерность — это ключевая мера сложности класса объектов, которая связывает целый ряд дисциплин. В этих лекциях я расскажу решение одной классической задачи, возникшей в теоретическом машинном обучении, касающейся VC-размерности многогранников. Решение использует теорему Олейника–Петровского–Милнора–Тома о количестве знаковых последовательностей, определяемых набором многочленов в $\mathbb{R}^d$.

Lie algebras weight systems and graph invariants

Сергей Константинович Ландо
НИУ ВШЭ (Москва, Россия)
lando@hse.ru

Abstract: Knot invariants are functions on isotopy classes of knots. They are intended to distinguish knots. Vassiliev's theory of nite order knot invariants allows one to associate to each knot invariant a function on chord diagrams simple combinatorial objects consisting of a circle and several chords in it. Such functions are called weight systems. Due to a theorem by Kontsevich, this correspondence is essentially one-to-one: each weight system determines a knot invariant. In particular, a weight system can be associated to any semi-simple Lie algebra. It happens, however, that already for the most simple nontrivial case, namely, for the Lie algebra sl(2), the computations of the corresponding weight system are very complicated. This case is one of the most important ones because it corresponds to the famous knot invariant known under the name of colored Jones polynomial.

The two lectures are aimed at explaining necessary definitions as well as theorems relating weight systems to invariants of graphs. Certain problems, both solved and unsolved, will be formulated.

Study of Hopf algebra structures on spaces spanned by graphs was initiated by S. Joni and G.-C. Rota in 1979 and was later unified with umbral calculus. Since then, a lot of combinatorial objects similar to graphs were shown to generate natural Hopf algebras. Embedded graphs are not among them, but this is true for closely related to them binary delta-matroids as dened by A. Bouchet in 1987. These general Hopf algebras have interesting Hopf subalgebras the study of which is sometimes easier and leads to eective explicit computations.

Many polynomial invariants of graphs, embedded graphs, and binary delta-matroids demonstrate a nice behavior with respect not only to the multiplicative structure, but to comultiplication as well. Examples include chromatic polynomial, characteristic polynomial, matching polynomial, Stanley's symmetrized chromatic polynomial, and many others.

Invariants of abstract graphs are closely related to those of chord diagrams (which are embedded graphs with a single vertex). In the framework of Vassiliev' theory of nite order knot invariants, chord diagrams serve as a tool to describe the latter. Similarly, certain invariants of binary delta-matroids and embedded graphs produce nite invariants of links. The Hopf algebra point of view leads to unexpected approaches to extending graph invariants to embedded graphs and binary delta-matroids. The talk will be based on recent results of my students, colleagues, and myself.

Hessenberg varieties, GKM theory and chromatic symmetric functions

Mikiya Masuda
Osaka City University (Osaka, Japan) and NRU HSE (Moscow, Russia)
mikiyamsd@gmail.com

Abstract: A Hessenberg variety $\mathrm{Hess}(A, h)$ is a subvariety of the flag variety $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ determined by two parameters: one is a matrix A of size n and the other is a function h from $\{1, \dots, n\}$ to itself satisfying certain conditions. Among Hessenberg varieties, regular semisimple ones, where the matrix A has distinct eigenvalues, are invariant under the natural torus action on the flag variety $\mathrm{Fl}(\mathbb{C}^n)$ and their cohomology rings become S_n-modules through GKM theory. Recently, the affirmative solution of the Sharesian-Wachs conjecture by Brosnan-Chow opened a way to prove the Stanley-Stembridge conjecture in graph theory by analyzing the S_n-modules. I will discuss this topic. Here are the titles of my three lectures:

1. Introduction to Hessenberg varieties.
2. GKM graph and S_n-actions on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties.
3. Chromatic symmetric functions and the Stanley-Stembridge conjecture.

Избранные задачи топологической комбинаторики

Олег Рустамович Мусин
University of Texas Rio Grande
omusin@gmail.com

Abstract: Топологическая комбинаторика занимается решением комбинаторных задач с применением топологических инструментов. В большинстве случаев эти решения очень элегантны, и связь между комбинаторикой и топологией часто оказывается неожиданным сюрпризом. На первой лекции я разберу классические теоремы о неподвижных точках, их дискретные аналоги, а также их обобщения. На второй лекции мы рассмотрим применения этих теорем к задачам справедливого дележа. В заключительной лекции будет рассказано о совсем недавних результатах по «количественной» лемме Шпернера, где применяются методы алгебраической топологии, а также о совместных работах с А.В. Малютиным.

Foliations arising from configurations of vectors, Gale duality, and moment-angle manifolds

Тарас Евгеньевич Панов
МГУ, НИУ ВШЭ и ИППИ (Москва, Россия)
tpanov@mech.math.msu.su

Abstract: Let $V \cong \mathbb{R}^k$ be a k-dimensional real vector space, and let $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ be a sequence (a *configuration*) of m vectors in the dual space V^*. We consider the action of V on the complex space $\mathbb{C}^m$ given by

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{C}^m &\longrightarrow \mathbb{C}^m \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z}) &\mapsto \bigl(z_1 e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v}\rangle}, \dots, z_m e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v}\rangle}\bigr). \end{aligned} \tag{1}$$

This is a very classical dynamical system taking its origin in the works of Poincaré. There is a well-known relationship between linear properties of the vector configuration Γ and the topology of the foliation of $\mathbb{C}^m$ by the orbits of (1). We systematise the existing knowledge on this relationship and proceed by analysing the topology of the nondegenerate leaf space using recent constructions of toric topology.

Комбинаторика выпуклости

Александр Андреевич Полянский
МФТИ (Москва, Россия)
alexander.polyanskii@yandex.ru

Abstract: Мы обсудим классические теоремы выпуклой геометрии (теорема Хелли и Тверберга) и цветные версии (при возможности также и целочисленные и топологические варианты этих теорем). С некоторыми из доказательств лектор раньше не встречал в литературе и познакомился в готовящейся к печати (но ещё не изданной) новой книге Имре Барань 'Combinatorial Convexty'.

Generalized virtual polyhedra and cohomology of torus manifold

Аскольд Георгиевич Хованский
University of Toronto (Toronto, Canada)
askold@math.toronto.edu

Abstract: About 30 years ago, thinking about the Riemann-Roch theorem for smooth toric varieties, Aleksandr Pukhlikov and I introduced virtual polyhedra and developed the theory of finite additive polynomial measures on such objects. One of our results is a description of the cohomology ring of smooth toric varieties in terms of volumes of virtual polyhedra.

Recently, thinking about torus manifolds, together with Leonid Monin and Ivan Limonchenko, we introduced generalized virtual polyhedra as well as smooth polynomial measures on them. Repeating Khovanskii–Pukhlikov construction we described the cohomology ring of torus manifolds in terms of volumes of such polyhedra.

It turned out that a similar result was obtained earlier by Mikiya Masuda and Anton Ayzenberg. I decided to present our results at this school, since our viewpoint on generalized virtual polyhedra is different (maybe more natural and general).

Пороговые вероятности и алгоритмические барьеры в теории случайных графов и гиперграфов

Дмитрий Александрович Шабанов
МФТИ, МГУ, НИУ ВШЭ (Москва, Россия)
dashabanov@hse.ru

На школе будет две лекции.

Лекция 1: Пороговые вероятности в случайных дискретных структурах.

В рамках лекции мы поговорим о феномене пороговых вероятностей в случайных дискретных структурах, так их как графы, гиперграфы и т.п. Сам эффект заключается в том, что для многих свойств существует некоторое пороговое значение среднего числа элементов случайного подмножества, до которого это свойство не выполняется с большой вероятностью, а при превышении которого, наоборот, свойство выполняется с большой вероятностью. Мы обсудим, почему такой феномен имеет место, рассмотрим примеры из случайных графов и гиперграфов, поговорим о том, что может происходить «внутри фазового перехода». Также обсудим примеры перколяционных эффектов в случайных геометрических структурах на плоскости.

Лекция 2: Алгоритмические барьеры в теории случайных графов и гиперграфов

Хорошо известно, что ряд классических задач в теории графов являются с вычислительной точки зрения NP-полными. Например, свойство гамильтоновости графа. Однако, если мы рассмотрим случайный граф и разрешим маленькую вероятность ошибки, то окажется, что с почти всеми графами будет легко разобраться. Например, для гамильтоновости критерием окажется определенная граница количества ребер. Это феномен пороговых вероятностей. Но возникает естественный вопрос: можно ли быстро отыскать искомую структуру (тот же гамильтонов цикл), если мы знаем, что она есть с очень большой вероятностью? Оказывается, в ряде задач это возможно, но не всегда граница наличия свойства совпадает с т.н. алгоритмической границей. На лекции мы поговорим об эффекте алгоритмических барьеров на примере задачи о раскраске, когда «геометрия» множества искомых объектов становится кластерной, что не позволяет их эффективно находить.

Университет
Сириус