

Open university Students' Autumn Mathematical Competition 2021

Факультет компьютерных наук ВШЭ.

18 сентября 2021, 16:30 – 19:30

II+ курс

1. Найдите минимальное значение выражения при $x > 0$:

$$\frac{(x + 1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x + 1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}$$

2. Даны два вектора: $v = (v_1, \dots, v_n)$ и $w = (w_1, \dots, w_n)$ в \mathbb{R}^n . Определим результат выполнения операции $v * w$ как матрицу, в которой элемент на пересечении i -ой строки и j -го столбца равен $v_i w_j$. Известно, что v и w линейно независимы. Найдите ранг матрицы $v * w - w * v$.

3. Вычислите предел: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n} \right)^{x^n}$.

4. Пусть A – матрица размера 2×2 с рациональными элементами, и пусть нашлось такое натуральное n , что $A^n = -I$, где I – это единичная матрица размера 2. Докажите, что либо $A^2 = -I$, либо $A^3 = -I$.

5. Пусть $K \subseteq \mathbb{R}$ – компакт. Докажите эквивалентность следующих двух условий:

а) Каждой точке $x \in K$ мы можем сопоставить несчётное множество $F_x \subseteq \mathbb{R}$ так, что для любых x, y из K выполнено

$$\text{dist}(F_x, F_y) \geq |x - y|$$

б) K имеет меру нуль.