

Open university Students' Autumn Mathematical Competition 2021

Факультет компьютерных наук ВШЭ.

18 сентября 2021, 16:30 – 19:30

I курс

1. Найдите все вещественные числа a , для которых существуют такие различные, не равные a , числа b, c и d , что четыре касательные, проведённые к кривой $y = \sin x$ в точках $(a, \sin a)$, $(b, \sin b)$, $(c, \sin c)$ и $(d, \sin d)$ образуют прямоугольник.
2. Определим последовательность чисел $\{a_k\}$ следующим образом: $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ и для всех целых неотрицательных чисел k выполняется

$$\det \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} \\ a_{k+2} & a_{k+3} \end{vmatrix} = k!$$

Докажите, что для всех натуральных индексов k числа a_k являются целыми.

3. Существует ли такая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что для любых двух действительных чисел x, y выполнено $f(x + f(y)) = f(x) + \sin y$?
4. Для произвольного d -значного натурального числа n , все цифры (десятичной записи) которого ненулевые, определим число n_k как результат перестановки последних k цифр числа n в начало. Например, для числа $n = 435$ имеем $n_0 = 435, n_1 = 543, n_2 = 354$ и т.д. Для натурального числа m определим $s_m(n)$ как количество таких k от 0 до $d - 1$, что n_k делится на m . Наконец, определим a_d как количество d -значных натуральных n без нулей в записи, для которых $s_2(n) + s_3(n) + s_5(n) = 2d$. Вычислите

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{a_d}{5^d}.$$