

Открытая осенняя студенческая олимпиада ФКН по математике 2022
OSAM Comp 2022

15 сентября 2022, 16:30 – 19:30

II+ курс

1. Найдите такую рациональную функцию $f(x)$ (то есть $f(x) = P(x)/Q(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены по x), что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \quad (|x| < 1).$$

2. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C_n}{A_n}$, где числа A_n и C_n определяются формулой

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ B_n & C_n \end{pmatrix}.$$

3. Рассмотрим матрицы A, B размера $n \times n$, где $n \geq 2$, и $B^2 = B$. Докажите, что:

$$\text{rank}(AB - BA) \leq \text{rank}(AB + BA)$$

4. Петя ходил на выставку современного искусства и увидел там картину с несколькими прямыми на плоскости, никакие две из которых не параллельны. Впечатлившись картиной, Петя пронумеровал прямые и записал в каких точках и сколько прямых пересекается. Всегда ли Петя может повторить шедевр современного искусства таким образом, чтобы в его версии все точки пересечения прямых были целочисленны?
5. Известно, что 1% площади поверхности некоторой сферы покрашены в чёрный цвет. Для каждой чёрной точки мы закрасим синим экватор этой сферы, для которого данная точка является одним из полюсов. Докажите, что синим покрашено не меньше 10% площади поверхности этой сферы.