

Открытая осенняя студенческая олимпиада ФКН по математике 2022  
OSAM Comp 2022

15 сентября 2022, 16:30 – 19:30

I курс

1. Пусть  $P$  и  $Q$  – многочлены с вещественными коэффициентами, причём  $P(x) + P'(x) + P''(x) + P^{(3)}(x) + \dots = Q(x)$ . Выразите  $P$  через  $Q$ .
2. Два 20-значных числа в двоичной системе счисления:  $a = (a_{19}, \dots, a_0)_2$  и  $b = (b_{19}, \dots, b_0)_2$  складывают “столбиком” (числа могут иметь ведущие нули, то есть, например,  $a_{19}$  может равняться 0). Какова вероятность переноса единицы из ведущего столбца (с  $a_{19}$  и  $b_{19}$ )?
3. У числа  $N$  больше ста нетривиальных делителей (то есть не равных  $N$  и 1). Докажите, что наименьший из них меньше  $0.01N$ .
4. Найдите все пары таких многочленов  $f, g \in \mathbb{C}[x]$  с комплексными коэффициентами, что для произвольного  $x \in \mathbb{C}$  выполняются следующие два условия:

$$f(f(x)) - g(g(x)) = 1 + i \quad \text{и} \quad f(g(x)) - g(f(x)) = 1 - i$$

5. Пусть  $\Gamma$  – ветка  $x > 0$  гиперболы  $x^2 - y^2 = 1$ . Точки  $P_0, P_1, \dots, P_n$  на  $\Gamma$  различны и выбраны так, что  $P_0 = (1, 0)$  и  $P_1 = (13/12, 5/12)$ , а последующие точки определяются следующим образом. Пусть  $t_i$  касательная к  $\Gamma$  в точке  $P_i$  для каждого индекса  $i$ , тогда точки  $P_i$  таковы, что для всякого  $i \geq 0$  площадь фигуры, ограниченной прямыми  $t_i, t_{i+1}$  и  $\Gamma$  постоянна и не зависит от  $i$ . Найдите координаты точек  $P_i$ .