International School
“Toric topology, combinatorics and data analysis”

International Laboratory of Algebraic Topology and Its Applications,
Faculty of Computer Science, HSE University, Moscow
and
Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow
Steklov International Mathematical Center, Moscow
and
Leonhard Euler International Mathematical Institute in Saint Petersburg

EIMI, 3-9 October 2022

Program and abstracts

The school is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (the grant to the Leonhard Euler International Mathematical Institute in Saint Petersburg, agreement no. 075-15-2022-287 and the grant to the Steklov International Mathematical Center, agreement no. 075-15-2022-265) and the International Laboratory of Algebraic Topology and Its Applications, Faculty of Computer Science, HSE University.

Program of the School

Monday, 3 October:

9:00-10:00 Registration
10:00-11:00 T. E. Panov, “Double cohomology of moment-angle complexes”
11:00-11:30 Coffee break
11:30-12:30 V. M. Buchstaber, “Theory and applications of n-valued groups I”
12:30-14:00 Lunch
14:00-15:00 Y. A. Verevkin (talk), T. A. Rakhmatullaev (talk)
15:00-16:00 A. A. Ayzenberg, “Evasive oracles and homology of moment-angle complexes I”
16:00-16:30 Coffee break
16:30-17:30 A. A. Gaifullin, “Minimal triangulations of manifolds which are like projective planes”
17:30-18:30 N. V. Khoroshavkina (talk), M. E. Beketov (poster)
19:00-22:00 Welcome reception

Tuesday, 4 October:

10:00-11:00 V. M. Buchstaber, “Theory and applications of n-valued groups II”
11:00-11:30 Coffee break
11:30-12:30 A. A. Ayzenberg, “Evasive oracles and homology of moment-angle complexes II”
12:30-14:00 Lunch
14:00-15:00 S. A. Alexandrov (talk), P. Y. Barabanshchikova (talk)
15:00-15:15 K. S. Sorokin (talk)
15:20-15:35 M. E. Beketov (talk)
15:40-15:55 T. A. Rakhmatullaev (talk)
16:00-16:15 D. A. Mikheev (talk)
16:20-17:00 A. Y. Perepechko, “Common refinenements of simplicial complexes and Oda’s strong factorization conjecture”
17:00-17:30 Coffee break
17:30-18:30 V. P. Pokidkin (talk), M. I. Kornev (talk)

Wednesday, 5 October:

10:00-18:00 Free day, discussions

Thursday, 6 October:

10:00-11:00 S. Terzić, “The theory of $(2n, k)$ - manifolds via Grassmann and flag manifolds”
11:00-11:30 Coffee break

11:30-12:30 N. Y. Erokhovets, “Combinatorics and hyperbolic geometry of families of three-dimensional polyhedra”
12:30-14:00 Lunch
14:00-15:00 S. Terzić (talk)
15:00-15:25 G. S. Chernykh (talk)
15:30-15:55 I. K. Zeinikesheva (talk)
16:00-16:25 V. Y. Gorchakov (talk)
16:30-16:55 V. A. Grauman (talk)
17:00-17:30 Coffee break
17:30-18:30 A. Aikyn (talk), G. V. Koryukin (talk)

Friday, 7 October:

10:00-11:00 A. Y. Vesnin, “Volumes of hyperbolic polyhedra”
11:00-11:30 Coffee break
11:30-12:30 N. Y. Erokhovets, “Toric topology of families of polyhedra”
12:30-14:00 Lunch
14:00-15:00 V. A. Oganisyan (talk), F. E. Vylegzhanin (talk)
15:00-16:00 G. Y. Panina, “Euler class: geometry and combinatorics I”
16:00-16:30 Coffee break
16:30-17:30 R. T. Živaljević, “Bier spheres, generalized moment-angle complexes, and the simplicial Steinitz problem
17:30-18:30 E. Y. Bunkova (talk)

Saturday, 8 October:

10:00-11:00 G. Y. Panina, “Euler class: geometry and combinatorics II”
11:00-11:30 Coffee break
11:30-12:30 A. Y. Vesnin, “Knots and links in spatial graph”
12:30-14:00 Lunch
14:00-15:00 R. T. Živaljević, “Generalized Tonnetz and discrete Abel-Jacobi map”
15:00-16:00 F. V. Petrov, “Algebraic and topological methods in combinatorics”
16:00-16:30 Coffee break
16:30-17:30 R. T. Živaljević (talk)
17:30-18:30 R. Aleksejevs (talk), R. A. Khrulev (talk)

Sunday, 9 October:

10:00-11:00 Discussions
11:00-11:30 Coffee break
11:30-12:30 Discussions

Abstracts of the lectures

A. A. Ayzenberg

HSE, International Laboratory of Algebraic Topology and Its Applications
ayzenberga@gmail.com

Evasive oracles and homology of moment-angle complexes

In order to check some property of a graph, one needs to ask a number of questions about edges of a graph. Let n be the number of vertices, so that $m = n(n-1)/2$ is the maximal possible number of edges. The original Aanderaa-Rosenberg conjecture (now proved) states that there exists $a > 0$ such that at least $a \cdot m$ questions are needed to check any monotonic invariant property. A stronger evasiveness conjecture (otherwise called Aanderaa-Karp-Rosenberg conjecture) asserts that exactly m questions are always needed to check a monotonic invariant property. There was much topological research around this stronger statement, relating the subject to the study of fixed point sets of finite group actions on cell complexes.

Instead, I replace a boolean oracle with an oracle operating on real/complex numbers, and, via results of Bjorner-Lovasz, relate the study of evasiveness to the theory of moment-angle complexes known in toric topology. Toral rank conjecture, proved by Ustinovskii for moment-angle complexes, allows to deduce a version of the original Aanderaa-Rosenberg conjecture for non-invariant monotonic properties.

This is quite a new perspective with lots of directions of research: in toric topology, theoretical informatics, and probably even artificial intelligence.

Prerequisites

It is assumed that the audience knows the definitions of a simplicial complex and that of homology (e.g. simplicial homology). Other concepts needed for understanding will be introduced in the lectures.

V. M. Buchstaber

Steklov Mathematical Institute / HSE, International Laboratory of Algebraic Topology and Its Applications
buchstab@mi-ras.ru

Theory and applications of n-valued groups

We will introduce the main notions and constructions of the n-valued groups theory. We will discuss key examples and topical problems of this theory. Results of the n-valued groups theory, which have found applications in various areas of mathematics, will be presented.

Bibliography

V. M. Buchstaber, "n-valued groups: theory and applications", Moscow Math. J., 6:1 (2006), 57-84;

V. M. Buchstaber, A. P. Veselov, A. A. Gaifullin, "Classification of involutive commutative two-valued groups", Uspekhi Mat. Nauk, 77:4(466) (2022), 91-172.

N. Y. Erokhovets

Lomonosov Moscow State University
erochovetsn@hotmail.com

Combinatorics, Lobachevsky geometry, and toric topology of families of three-dimensional polytopes

Combinatorics and hyperbolic geometry of families of three-dimensional polytopes

It is planned to talk about families of three-dimensional polytopes de fined by the condition of a cyclic k-edge-connectivity. Among these families we consider flag and Pogorelov polytopes. Using E.M. Andreev's theorem, we will show that flag polytopes can be realized as bounded polytopes with equal dihedral angles, while Pogorelov polytopes can be realized in the same manner with right dihedral angles.

Among Pogorelov polytopes there is an important subfamily of fullerenes, that is simple 3-polytopes with only pentagonal and hexagonal faces. Such polytopes are mathematical models of carbon molecules, which are fundamental objects of quantum physics, quantum chemistry and nanotechnology.

We also consider the family of ideal right-angled polytopes, which play a central role in the Koebe-Andreev-Thurston theorem which states that every three-dimensional polytope can be realized in the Euclidean three-dimensional space in such a way that all its edges touch the sphere. For each family, we will show how to build it from several initial polytopes using vertex and edge cut operations.

Toric topology of families of polytopes

To each simple polytope toric topology associates a smooth manifold with a torus action, such that the polytope is the orbit space of this action. The topology of this manifold and action depends only on the combinatorics of the polytope.

It is planned to discuss the problems of cohomological rigidity: when the polytope is uniquely determined by the graded cohomology ring of the moment-angle manifold. In particular, we will discuss why Pogorelov polytopes and ideal right-angled polytopes are rigid.

To do this, we will describe the cohomology ring of the moment-angle manifold using the combinatorics of the polytope. In particular, we will show which sets of cohomology classes are rigid, that is, they are mapped into each other under any isomorphism of cohomology rings.

A. A. Gaifullin

Steklov Mathematical Institute / MSU / Skoltech
agaif@mi-ras.ru

Minimal triangulations of manifolds which are like projective planes

In 1987 Brehm and Kühnel proved the following estimate: Any combinatorial triangulation of a closed d-manifold which is not homeomorphic to the sphere has at least $3d/2 + 3$ vertices. Triangulated manifolds that have exactly $3d/2+3$ vertices and are not spheres are interesting combinatorial objects. They possess a lot of nice combinatorial and topological properties. In particular, such manifolds may exist in dimensions 2, 4, 8, and 16 only, and are manifolds 'like projective planes' in the sense of Eells and Kuiper. Until recently, there were only 5 known examples of such triangulated manifolds, namely, the 6-vertex triangulation of the real projective plane, the 9-vertex triangulation of the complex projective plane, and three 15-vertex triangulations of the quaternionic projective plane. Very recently, the speaker has succeeded to construct many (more than 10^{103}) such triangulations in dimension 16. The course will be devoted to constructions and properties of these combinatorial manifolds.

G. Y. Panina

St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences / SPBU
g.y.panina@spbu.ru

Euler class: geometry and combinatorics

Theoretically, Euler class is a topological invariant of a fiber bundle. Practically, it is a usefull tool for solving problems where usual continuity tricks do not work.

We will discuss two subjects:

– how to use Euler class in practice. As an example, we shall prove Borsuk-Ulam theorem via Euler class.

– Euler class in the triangulated world: a local combinatorial formula.

T. E. Panov

MSU / HSE, International Laboratory of Algebraic Topology and Its Applications
tpanov@mech.math.msu.su

Double cohomology of moment-angle complexes

There is a cochain complex structure $CH^*(Z_K)$ on the cohomology of a moment-angle complex Z_K, obtained by defining a new differential d' on the Hochster decomposition of the Tor-algebra of the face ring of a simplicial complex K. Cohomology of $CH^*(Z_K)$ is called the double cohomology, $HH^*(Z_K)$.

It can be identified with the second double cohomology of a bicomplex obtained by adding the second differential d' to the Koszul differential graded algebra of the face ring of K.

The motivation for defining $HH^*(Z_K)$ comes from persistent cohomology. The double cohomology and the corresponding bigraded barcodes possess a stability property, unlike the ordinary cohomology $H^*(Z_K)$.

A. Y. Perepechko

HSE, Faculty of Computer Science
a@perep.ru

Common refinements of simplicial complexes and Oda's strong factorization conjecture

Tadao Oda's conjecture states that any proper toric birational map between complete smooth toric varieties can be decomposed into a sequence of blowups with nonsingular invariant centers followed by a sequence of inverses of such maps.

It is expressed combinatorially as follows: given two nonsingular fans of polyhedral cones with the same support, there exists a third fan that can be reached from both fans by sequences of smooth star subdivisions.

We will study this conjecture and a possible approach by Sergio Da Silva and Kalle Karu in dimension 3, which is reduced to studying subdivisions of a single triangle.

F. V. Petrov

Saint Petersburg State University
f.v.petrov@spbu.ru

Algebraic and topological methods in combinatorics

Both polynomial algebra and algebraic topology are successfully used for proving combinatorial results (usually of existence theorems type) for a while. In a joint work with Roman Karasev (2012) we established an unexpected relation between these methods, which is still not understood satisfactory. I want to discuss both achievements and questions in this area.

S. Terzić

University of Montenegro
sterzic@ucg.ac.me

The theory of $(2n, k)$ - manifolds via Grassmann and flag manifolds

We present the basic facts on the theory of $(2n, k)$-manifolds which has been recently developed in our joint works with Victor M. Buchstaber. Throughout the presentation we will also demonstrate these facts in the case of the canonical compact torus action on the complex Grassmann and flag manifolds. Eventually, this will lead to the description of the corresponding equivariant structures and orbit spaces of the complex Grassmann and flag manifolds.

Bibliography

V. M. Buchstaber and S. Terzić, *Topology and geometry of the canonical action of* T^4 *on the complex Grassmannian* $G_{4,2}$ *and the complex projective space* CP^5, Moscow Math. Jour. Vol. 16, Issue 2, (2016), 237–273.

V. M. Buchstaber and S. Terzić, *Toric Topology of the Complex Grassmann Manifolds*, Moscow Math. **19**, no. 3, (2019) 397-463.

V. M. Buchstaber and S. Terzić, *The foundations of* $(2n, k)$*-manifolds*, Sb. Math. 210, No. 4, 508-549 (2019).

Victor M. Buchstaber and Svjetlana Terzić, *A resolution of singularities for the orbit spaces* $G_{n,2}/T^n$, Proc. of Steklov Inst. of Math., vol. 317, in press.

A. Y. Vesnin

Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences / Novosibirsk State University / Tomsk State University
vesnin@math.nsc.ru

Volumes of hyperbolic polyhedra

We will consider a class of polyhedra which can be realized with all dihedral angles $\pi/2$ in a Lobachevsky 3-space. These polyhedra are referred as right-angled hyperbolic. It is known that right-angled hyperbolic polyhedra can be used as building blocks for a wide class of hyperbolic 3-manifolds, including some link complements [1]. Following [2] and [3], we will present volume computations and bounds of volumes of right-angled polyhedra in terms of number of vertices. These volumes computations suggested the Right-angled knots conjecture formulated in [4].

Bibliography

[1] A.Vesnin, Right-angled polyhedra and hyperbolic 3-manifolds, Russian Math. Surveys, 2017, 72(2), 335-374. http://dx.doi.org/10.1070/RM9762

[2] A. Vesnin, A. Egorov, Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space, Chebyshevskii Sbornik 2020, vol. 21, no. 2, pp. 65—83. http://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-2-65-83.

[3] S. Alexandrov, N. Bogachev, A. Egorov, A. Vesnin, On volumes of hyperbolic right-angled polyhedra, accepted. Preprint version is available at arXiv:2111.08789.

[4] A Champanerkar, I. Kofman, J. Purcell, Right-angled polyhedra and alternating link, Algebraic and Geometric Topology, 2022, 22, 739-784

Knots and links in spatial graph

An embedding f of a finite graph G into the 3-sphere is called a spatial embedding of G, and $f(G)$ is called as spatial graphs of G. The fundamental problem in the theory of spatial graphs is, for any given graph G, to classify up to isotopy of the embeddings of G.

Firstly, we will discuss intrinsically linked graphs. Any set of pairwise disjoint cycles in G will give a link in $f(G)$. If a spatial graph $f(G)$ contains a non-trivial link, then we say that $f(G)$ is linked. A graph is said to be intrinsically linked if a spatial graph $f(G)$ is linked for any f. In 1980's Conway – Gordon and Sachs independently proved that K_6 is intrinsically linked, where K_n is the complete graph on n vertices. We will discuss this result and its various generalizations.

Secondly, we will discuss the Yamada polynomial which is useful to determine that two spatial graphs are not equivalent.

R. T. Živaljević

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts
rade@turing.mi.sanu.ac.rs

Bier spheres, generalized moment-angle complexes, and the simplicial Steinitz problem

The problem of deciding if a given triangulation of a sphere is realizable as the boundary sphere of a simplicial, convex polytope is known as the "Simplicial Steinitz problem". This is an example of a problem of geometric combinatorics which links together areas of mathematics as distant as combinatorial optimization, toric topology, convex polytopes, algebraic geometry, topological combinatorics, discrete and computational geometry, etc.

It is known (by indirect and non-constructive arguments) that a vast majority of triangulated spheres are "non-polytopal", in the sense that they are not combinatorially isomorphic to the boundary of a convex polytope. This holds, in particular, for Bier spheres Bier(K) (named after T. Bier), the $(n-2)$-dimensional, combinatorial spheres on $2n$-vertices, constructed with the aid of simplicial complexes K on n vertices.

Emphasizing connections with toric topology (generalized moment-angle complexes), we will review "hidden geometry" of Bier spheres by describing their natural geometric realizations, compute their volume, describe an effective criterion for their polytopality, and associate to Bier(K) a natural coarsening Fan(K) of the Braid fan. We also establish a connection of Bier spheres of maximal volume with recent generalizations of the classical Van Kampen-Flores theorem and clarify the role of Bier spheres in the theory of generalized permutohedra.

Generalized Tonnetz and discrete Abel-Jacobi map

Motivated by the classical *Tonnetz*, a conceptual lattice diagram representing tonal space, described originally by Leonhard Euler in 1739, we introduce and study the combinatorics and topology of more general simplicial complexes $Tonn^{n,k}(L)$ of *Tonnetz type*. Out main result is that for a sufficiently generic choice of parameters the generalized tonnetz $Tonn^{n,k}(L)$ is a triangulation of a $(k-1)$-dimensional torus T^{k-1}. In the proof we construct and use the properties of a *discrete Abel-Jacobi map*, which takes values in the torus $T^{k-1} \cong \mathbb{R}^{k-1}/\Lambda$ where $\Lambda \cong \mathbb{A}^*_{k-1}$ is the permutohedral lattice.

Bibliography

Euler, Leonhard (1739). Tentamen novae theoriae musicae ex certissismis harmoniae principiis dilucide expositae. Saint Petersburg Academy. p. 147.

F. D. Jevti, R. T. Živaljević, Generalized Tonnetz and discrete Abel-Jacobi map, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Vol 57, No 2 (2021).

Abstracts of the talks

С. А. Александров

МФТИ
cyanprism@gmail.com

Многогранники Кокстера в пространствах Лобачевского

Многогранниками Кокстера называют многогранники, все углы которых являются целыми частями π. В евклидовых пространствах и на сферах все такие многогранники были классифицированы Кокстером в 1934 году. Изучение многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского было начато Винбергом. В 1984 году ему удалось доказать, что, в отли- чии от евклидового и сферического случаев, в пространствах Лобачевского размерности 30 и более таких многогранников нет. В 1992 году Бугаенко построил пример многогранника Кокстера рекордной на текущий момент размерности 8. Одной из центральных задач этой области является нахождение размерностей, в которых такие многогранники могут существовать.

В своем докладе я расскажу об основных идеях, которые применяются при изучении многогранников Кокстера, а также о своих недавних продвижениях.

Р. Алексеевс

МГУ им. М.В.Ломоносова
aleksejevs.ruslans@gmail.com

О теореме Хилтона-Милнора и ее обобщениях

Теорема Хилтона-Милнора - один из главных результатов теории гомотопий. Ее первая версия была сформулирована и доказана Хилтоном в его статье 1955 года ([1]), посвященной описанию разложения группы $\pi_n(S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \ldots \vee S^{n_k})$ в бесконечную прямую сумму гомотопических групп сфер. Уже в 1956 году в неопубликованных заметках Милнора ([2]) результат Хилтона был сильно обобщен - был найден гомотопический тип пространства петель над $\Sigma(S^{n_1} \vee S^{n_2} \vee \ldots \vee S^{n_k})$.

В своем докладе я более подробно расскажу о результате Милнора и некоторых его обобщениях ([3],[4]). Также мы наметим возможности дальнейшего обобщения теоремы Хилтона-Милнора, гармонично сочетающиеся с объектами изучения торической топологии, и, возможно, немного обсудим данную теорему в контексте ∞-категорий ([5]).

Bibliography

[1] P. J. Hilton. “On the homotopy groups of the union of spheres”. В: *Jour. London Math. Soc.* 30 (1955), с. 154—172.

[2] John Willard Milnor. “On the construction FK”. В: *Adams, John Frank, Algebraic topology—a student’s guide* (1972), с. 118—136.

[3] Gerald J. Porter. “A generalization of the Hilton-Milnor theorem”. В: *Bull. Amer. Math. Soc.* 71.2 (1965), с. 357—359.

[4] Taras. E. Panov и Stephen Theriault. “The homotopy theory of polyhedral products associated with flag complexes”. В: *Compositio Mathematica* 155 (2019), с. 206—228.

[5] Sanath Devalapurkar и Peter Haine. “On the James and Hilton–Milnor Splittings, the metastable EHP sequence”. В: *Documenta Mathematica* 26 (2021), с. 1423—1464.

П. Ю. Барабанщикова

МФТИ
barabanshchikova.piu@phystech.edu

Оптимизационный подход в задачах типа Тверберга

Классическая теорема Тверберга утверждает, что любое множество из $(r-1)(d+1)+1$ точки в $\mathbb{R}^d$ можно разбить на r подмножеств, выпуклые оболочки которых пересекаются. В своих доказательствах этой теоремы Тверберг и Вречица [1], а также Руднев [2] использовали оптимизационный подход с перестройкой неоптимальных разбиений. Я расскажу о двух задачах типа Тверберга, которые удалось решить с помощью похожего подхода.

Доклад основан на совместной работе с Александром Полянским.

Bibliography

[1] Helge Tverberg и Siniša Vrećica. “On Generalizations of Radon’s Theorem and the Ham Sandwich Theorem”. В: *European Journal of Combinatorics* 14.3 (1993), с. 259—264. issn: 0195-6698. doi: https : / / doi . org / 10 . 1006 / eujc . 1993 . 1029. url: https : / / www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669883710292.

[2] Jean-Pierre Roudneff. “Partitions of Points into Simplices withk-dimensional Intersection. Part I: The Conic Tverberg’s Theorem”. В: *European Journal of Combinatorics* 22.5 (2001), с. 733—743. issn: 0195-6698. doi: https : / / doi . org / 10 . 1006 / eujc . 2000 . 0493. url: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669800904931.

M. E. Beketov

(j.w. Alexey Gorelov and German Magai)

HSE, International Laboratory of Algebraic Topology and Its Applications
mbeketov@hse.ru

Reconstructing knots from point clouds with persistent homology

The problem of reconstructing a knot from a point cloud followed by recognition of its topological type arises in physics, biology and chemistry. In the present work we propose several new methods to reconstruct a knot from a noisy point cloud with further simplification of the resulting closed polygonal curve. We examine the robustness of the proposed methods with respect to normal noise. We use the data from the KnotProt 2.0 database [1] of proteins that are knotted in certain ways (forming knots of types 01; 31; 41; 51, etc.).

Present solution of this problem comes in 3 steps:

1. Reconstructing a polygonal closed curve from the given point cloud.
2. Simplifying the obtained curve, that is minimising the number of segments forming it.
3. Computing the topological invariants of the curve that distinguish its topological type.

The first step starts with constructing the Euclidean minimum spanning tree (EMST) of the point cloud. Next, there are at least two options for adding an edge to form a cycle that represents the knot (Fig. 1).

One is to connect the two points that are most distant with respect to the tree (path) metric. The other option is to connect the two points forming an edge that corresponds to the birth of the most long-living one-dimensional persistent homology (PH). PH is a central concept in topological data analysis (TDA), and applying it in knot reconstruction problem makes one of the contributions of the present paper.

For the second step, we use the KTM algorithm [2] that reduces the number of segments in the polygonal closed curve making the knot by removing certain vertices, in a way that preserves its topological type. There seems to be room for improvement of this method, since it only operates on the original points, while perturbing them in some way may improve the final result.

To distinguish the topological types of knots presented in the KnotProt 2.0. database on the third step, we use calculate knot invariants (e.g. Alexander and Jones polynomials) by means of Topoly software [3].

Another contribution of the present paper is the study this method's performance in presence of noise that models uncertainty in point positions points are considered to be uniformly distributed along the polygonal curve of the knot plus some Gaussian noise in the planes orthogonal to the segments the points are chosen from. By controlling the variance scale of this normal component and the number of points the knot is reconstructed from, we examine the robustness of such invariant-based knot classification.

We thank Anton Ayzenberg and Konstantin Sorokin for fruitful discussions.

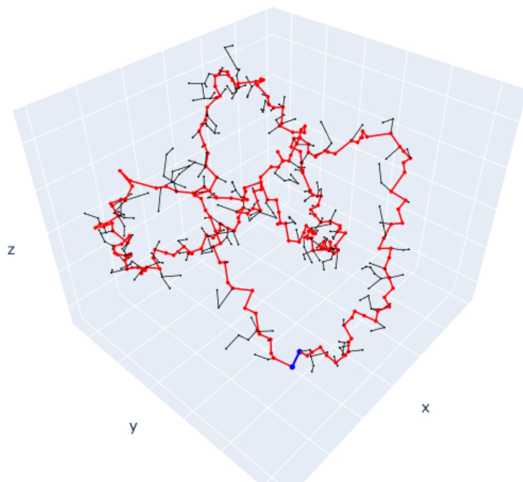

Рис. 1: Noisy trefoil knot reconstructed. The edge shown in blue gives birth to the longest-living one-dimensional persistent homology (red+blue).

Bibliography

[1] Dabrowski-Tumanski, Pawel, et al. “KnotProt 2.0: a database of proteins with knots and other entangled structures”, Nucleic acids research 47.D1 (2019): D367-D375.

[2] Koniaris, Kleanthes, and Murugappan Muthukumar. “Selfentanglement in ring polymers”, The Journal of chemical physics 95.4 (1991): 2873-2881.

[3] Dabrowski-Tumanski, Pawel, et al. “Topoly: Python package to analyze topology of polymers”, Briefings in Bioinformatics 22.3 (2021): bbaa196.

E. Y. Bunkova

Steklov Mathematical Institute
eybunkova@gmail.com

Parametric Korteweg–de Vries hierarchy and hyperelliptic sigma functions

In the talk we will present the definition of the parametric Korteweg–de Vries hierarchy. This hierarchy depends on an infinite set of graded parameters. For any genus the Klein hyperelliptic function, defined on the basis of the multidimensional sigma function, gives a solution of this hierarchy. We will describe the relation of the parameters of the hierarchy and the multidimensional sigma functions.

We will give the definition of the family of Buchstaber–Shorina differential operators. This family consists of g third-order differential operators of g variables. The operators in the family commute in pairs and also commute with the Shrödinger operator. We will show the connection of such families with the parametric Korteweg–de Vries hierarchy.

The talk is based on the results of the work E. Yu. Bunkova, V. M. Buchstaber, "Parametric Korteweg–de Vries hierarchy and hyperelliptic sigma functions", Functional Analysis and Its Applications, **56**:3 (2022), 16-38.

Y. A. Verevkin

HSE, International Laboratory of Algebraic Topology and Its Applications
verevkin_j.a@mail.ru

The Lie algebra associated with the lower central series of a right-angled Coxeter group

We study the lower central series of a right-angled Coxeter group RC_K and the associated Lie algebra $L(RC_K)$. The latter is related to the graph Lie algebra L_K. We give an explicit combinatorial description of the first three consecutive factors of the lower central series of the group RC_K.

Ф. Е. Вылегжанин

НИУ ВШЭ, МГУ им. М.В.Ломоносова
vylegf@gmail.com

О коформальности момент-угол комплексов

Формальность и коформальность - важные свойства гомотопического типа, изначально определённые в рациональной теории гомотопий (хотя можно говорить о (ко)формальности топологического пространства над любым кольцом).

Формальности препятствуют высшие произведения Масси, а коформальности - высшие произведения Уайтхеда. Момент-угол комплексы - важное в торической топологии семейство топологических пространств, параметризованных симплициальными комплексами. Они могут иметь как простую, так и весьма сложную топологию (от букетов сфер до неформальных комплексных многообразий).

Исследуя спектральную последовательность Милнора-Мура, мы доказываем, что широкий класс момент-угол комплексов не коформален. С другой стороны, из недавних результатов Р.Хуанга следует рациональная коформальность момент-угол комплексов, соответствующих флаговым симплициальным комплексам.

В. А. Грауман

МГУ им. М.В.Ломоносова
grauman80@gmail.com

Высшие алгебраические структуры и описание гомотопических инвариантов пространств

Доклад посвящен изложению теории высших алгебраических структур и их применениям к алгебраической топологии. Мы рассмотрим главным образом понятия A_∞ и L_∞-структур, являющиеся высшими гомотопическими аналогами DG-алгебр и DG-алгебр Ли соответственно.

Будут изложены их основные свойства и классические результаты о их связи с высшими (ко-)гомологическими и гомотопическими операциями, с формальностью и коформальностью алгебр и пространств, их связи с информацией, содержащихся в дифференциалах спектральных последовательностей.

Будут даны также некоторые обобщения этих структур, их приложения к описаниям гомотопических типов пространств, и как можно применить их для доказательства отсутствия/наличия соотношений в рациональных гомотопических алгебрах пространств (или же в рациональных алгебрах Понтрягина), фигурирующих в копредставлении, происходящего из модели Квиллена.

Последнее было использовано для доказательства отсутствия соотношений в алгебрах Понтрягина момент-угол комплексов. По возможности мы упомянем дальнейшие открытые вопросы в этом направлении.

N. Y. Erokhovets

Lomonosov Moscow State University
erochovetsn@hotmail.com

Cohomological rigidity of manifolds associated to ideal right-angled hyperbolic 3-polytopes

Toric topology assigns to each n-dimensional combinatorial simple convex polytope P with m facets an $(m+n)$-dimensional moment-angle manifold $\mathcal{Z}_P$ with an action of a compact torus T^m such that $\mathcal{Z}_P/T^m$ is a convex polytope of combinatorial type P.

A simple n-polytope is called *B-rigid*, if any isomorphism of graded rings $H^*(\mathcal{Z}_P,\mathbb{Z}) = H^*(\mathcal{Z}_Q,\mathbb{Z})$ for a simple n-polytope Q implies that P and Q are combinatorially equivalent.

An *ideal almost Pogorelov polytope* is a combinatorial 3-polytope obtained by cutting off all the ideal vertices of an ideal right-angled 3-polytope in the Lobachevsky (hyperbolic) space $\mathbb{L}^3$. These polytopes are exactly the polytopes obtained from any, not necessarily simple, convex 3-polytopes by cutting off all the vertices followed by cutting off all the "old" edges. The boundary of the dual polytope is the barycentric subdivision of the boundary of the old polytope (and also of its dual polytope). We will discuss the following

Theorem. [1,2] *Any ideal almost Pogorelov polytope is B-rigid.*

A family of manifolds is *called cohomologically rigid over the ring* R, if for any two manifolds M and N from the family any isomorphism of graded rings $H^*(M,R) = H^*(N,R)$ implies that M and N are diffeomorphic.

Any ideal almost Pogorelov polytope P has a canonical colouring of facets in 3 colours corresponding to vertices, edges and facets of the polytope that gives P via cutting off vertices and "old" edges. This colouring produces the 6-dimensional quasitoric manifold $M(P)$ and the 3-dimensional small cover $N(P)$, which are known as "pullbacks from the linear model".

Corollary. *The families $\{\mathcal{Z}_P\}$, $\{M(P)\}$, and $\{N(P)\}$ indexed by ideal right-angled hyperbolic 3-polytopes are cohomologically rigid over $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z}_2$ respectively.*

We will also find the Thurston's geometric decomposition of the 3-manifold $N(P)$: each quadrangle arising from a vertex of the ideal polytope gives an incompressible torus in $N(P)$, and $N(P)$ is divided by these tori into two equal parts homeomorphic to a hyperbolic manifold of finite volume glued of 4 copies of the ideal polytope.

Bibliography

[1] N.Yu. Erokhovets, *Cohomological rigidity of families of manifolds associated with ideal right-angled hyperbolic 3-polytopes*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2022, Vol. 317, pp. 1–36. arXiv: 2005.07665v4.

[2] N.Yu. Erokhovets, *B-rigidity of the property to be an almost Pogorelov polytope*, Topology, Geometry, and Dynamics: V. A. Rokhlin-Memorial, Contemporary Mathematics, **772**, eds. Anatoly M. Vershik, Victor M. Buchstaber, Andrey V. Malyutin, American Mathematical Society, 2021, 107–122. arXiv: 2004.04873v5.

R. T. Živaljević

Mathematical Institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts
rade@turing.mi.sanu.ac.rs

Application of algebraic topology in combinatorics and discrete geometry: the method of configuration spaces and equivariant test maps

The method of configuration spaces, known also as the “configuration space/test map scheme”, has been for decades one of the central paradigms for applying topological methods to problems of combinatorics and discrete and computational geometry. In recent years the method has found new applications to mathematical welfare economics (fair allocation of resources, envy-free division, etc.). We illustrate the method by proving several relatives (extensions) of the classical envy-free division theorem of David Gale in the presence of a non-cooperative player, where the emphasis is on preferences allowing the players to choose degenerate pieces of the “cake”.

Bibliography

[1] G. Panina, R.T. Živaljević. Envy-free division in the presence of a dragon, Journal of Fixed Point Theory and Applications, accepted.

[2] R.T. Živaljević. Topological methods in discrete geometry, Chapter 21 in Handbook of Discrete and Computational Geometry (third edition), CRC Press LLC, 2017.

И. К. Зейникешева

МЦМУ МИАН им. В.А.Стеклова
znikzk@gmail.com

Эквивариантные когомологии момент-угол-комплексов

В докладе будет показано вычисление эквивариантных когомологий момент-угол-комплексов $\mathcal{Z}_K$ относительно действия координатных подторов. Также будут предложены критерий для эквивариантной формальности $\mathcal{Z}_K$ и уточнение критерия для случаев флаговых комплексов и графов.

М. И. Корнев

МЦМУ МИАН, МГУ им. М.В.Ломоносова
michaelkorneff@gmail.com

Гомотопические категории, ассоциированные с модельными категориями, как правило, неконкретны

Многие известные категории являются конкретными. Их можно рассматривать, как «категории множеств с дополнительной структурой». Конкретными, например, является категория топологических пространств, категория R-модулей, категория групп и др. Для абелевых категорий существует строгий полный точный функтор в категорию R-модулей (Freyd’s–Mitchell’s embedding theorem, 1964), т. е. любую абелеву категорию можно рассматривать, как подкатегорию категории левых R-модулей.

Имеется конструкция, которая сопоставляет модельной категории соответствующую ей гомотопическую категорию. Как правило, полученная гомотопическая категория не является конкретной. Например, гомотопическая категория $hTop$, соответствующая категории Top топологических пространств, является исторически первым примером неконкретной категории. Этот результат был получен в работе (Freyd, 1969) при помощи последовательности Пуппе пар пространств Мура специального типа. В недавней работе (Liberi, Loregian, 2018) было получено обобщение результата на широкий класс гомотопических категорий модельных категорий. В докладе будет разобран данный результат и его следствия.

Г. В. Корюкин

МГУ им. М.В.Ломоносова
gregory20018@mail.ru

Алгебры Понтрягина и момент-угол комплексы

Конструкция полиэдральных произведений дает широкий и интересный класс пространств. Одним из важнейших его подклассов является класс момент-угол комплексов, получающийся полиэдральными произведениями диска и окружности.

Всевозможные алгебраические структуры, построенные по пространствам рассматриваются по многим причинам, ведь с помощью них можно получить различные инварианты и получить много важных связей между топологией и алгеброй пространства.

Алгебры Понтрягина получаются из расслоения пространства Дэвиса-Янушкевича, и в случае, когда соответсвующий комплекс является флаговым, полностью описаны.

На докладе будут рассмотрены базовые понятия, а также разобраны несколько интересных примеров, в том числе подсчет момент-угол комплекса, построенного последовательным приклеиванием пустых симплексов к данному, и рассмотрение алгебры Понтрягина для достаточно простого нефлагового комплекса, хотя полученная алгебра будет не самой тривиальной.

В. А. Оганисян

МГУ им. М.В.Ломоносова
potchtovy_jashik@mail.ru

Момент-угол-комплексы, соответствующие простым многогранникам, и связные суммы произведений сфер

Момент-угол-комплексы — интересный и важный класс пространств, отдельный интерес среди которых представляют те, которые соответствуют простым многогранникам P. Такие момент-угол-комплексы $\mathcal{Z}_P$ являются гладкими многообразиями с комплексной структурой; более того, они могут быть заданы как пересечение эрмитовых квадрик.

В своем докладе я сосредоточу внимание на многогранниках P, которым соответствуют $\mathcal{Z}_P$, диффеоморфные или гомотопически эквивалентные связным суммам произведений сфер. Известны широкие классы многогранников (например, двойственные стековым, циклические), которым соответствуют момент- угол-комплексы, диффеоморфные связной сумме произведений *пар* сфер (см. [1], [2]), однако пример P такого, что $\mathcal{Z}_P \cong M_1 \# M_2 \# \ldots \# M_k$, где все M_i это произведения сфер и хотя бы одно M_i содержит *более двух* слагаемых, появился относительно недавно (см. [3], [4]).

Основным результатом, который будет изложен в докладе, является следующая теорема:

Теорема 1.1. Пусть P — трехмерный простой многогранник, не являющийся кубом; тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) P получается из симплекса Δ^3 последовательной срезкой вершин, то есть P^* — стековый многогранник;

(b) $\mathcal{Z}_P$ гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер.

(c) $H^*(\mathcal{Z}_P)$ изоморфно кольцу когомологий связной суммы произведений сфер.

(d) 1-остов K_P — хордовый граф.

(e) K_P минимально неголодов.

Интересны также вопросы, возникающие при попытке рассмотреть аналогичные связи для многогранников размерности больше трех, а также возникающие при этом препятствия.

Литература, использованная в аннотации:

Bibliography

[1] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, «Toric Topology», Mathematical Surveys and Monographs 204, American Mathematical Society, 2015.

[2] Samuel Gitler, Santiago López de Medrano, «Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums». Geom. Topol. 17 (2013), no. 3, 1497–1534.

[3] Feifei Fan, Liman Chen, Jun Ma, Xiangjun Wang, «Moment-angle manifolds and connected sums of sphere products», arXiv:1406.7591.pdf

[4] Kouyemon Iriye, «On the moment-angle manifold constructed by Fan, Chen, Ma, and Wang», arXiv:1608.02673.pdf

В. П. Покидкин

НИУ ВШЭ, Факультет математики
pokidkin.vladislav@gmail.com

Дискриминанты и двойственная вырожденность

Торическое многообразие является двойственно вырожденным, если двойственное многообразие к нему – дискриминант – не является гиперповерхностью. Будет рассказано о комбинаторное описании двойственного дефекта, полученного Фурукавой и Ито.

Одной из веток обобщений является рассмотрение полиномиальных систем с фиксированными носителями. В этом случае дискриминант – множество коэффициентов системы с особой точкой – может иметь больше одной компоненты и компоненты могут иметь разную коразмерность. Мы обсудим существующие результаты об описании структуры дискриминанта в этом случае.

Т. А. Рахматуллаев

МГУ им. М.В.Ломоносова
raxtemur@gmail.com

Присоединенные алгебры Ли и их приложения

Представление дискретных групп в алгебрах Ли - полезный инструмент, для изучения структуры дискретных групп. Пусть G - группа, тогда можно изучать присоединенную алгебру Ли, полученную как прямая сумма $\oplus\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$, где $\gamma(G)$ - нижний центральный ряд группы G. Скобка в такой алгебре соответствует групповому коммутатору. Мы рассмотрим группы для которых известно исчерпывающее описание присоединенных алгебр Ли, а также их приложения в торической топологии.

Для свободных групп присоединенные алгебры хорошо изучены в работах Магнуса [1], доказана из изоморфность свободным алгебрам Ли. Позже во множестве работ подход Магнуса продолжался и обобщался на случай частично коммутативных групп (они же - прямоугольные группы Артина), например в [2], [3] и [4].

В работах Пренера [5] и Волдингера [6] при помощи "процесса сборки" коммутаторов Холла авторам удалось построить базис присоединенной алгебры Ли для групп G следующего вида:

$$G = Q_1 * \ldots * Q_n, \quad Q_i = \mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2$$

Нас же интересует прямоугольная группа Кокстера RCK - группа с m образующими $v_1, \ldots, v_m$ и соотношениями $v_i^2 = 1$ для всех $i \in [m]$ и $v_iv_j = v_jv_i$ для $\{i,j\} \in K$. Эта задача уже была частично изучена в статье Веревкина [7]. Особый интерес к группам Кокстера объясняется их тесной связью с гиперболической геометрий и появлением при изучении групп гомотопий полиэдральных произведений [8].

Bibliography

[1] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д., Комбинаторная теория групп: Представления групп в терминах образующих и соотношений. М.:Наука, 1974

[2] Wade R., The lower central series of a right-angled Artin group. Enseign. Math. 61 (2015), 343-371. doi: 10.4171/LEM/61-3/4-4

[3] Duchamp G. and Krob D., The lower central series of the free partially commutative group, Semigroup Forum, vol. 45, no. 1, 385–394 (1992).

[4] Duchamp G. and Krob D., The Free Partially Commutative Lie Algebra: Bases and Ranks, Ad-vances in Mathematics, 95, 92-126 (1992).

[5] Prener R., The Lower Central Series of Special Groups generated by Elements of Order Two. Ph.D. Thesis, The Polytechnic Institute of Brooklyn, 1969

[6] Waldinger, Hermann V.. "The lower central series of groups of a special class." Journal of Algebra 14 (1970): 229-244.

[7] Верёвкин Я. А., "Присоединенная алгебра Ли прямоугольной группы Кокстера", Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика, Сборник статей. К 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Труды МИАН, 305, МИАН, М., 2019, 61–70; Proc. Steklov Inst. Math., 305 (2019), 53–62

[8] Панов Т. Е., Веревкин Я. А. Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Кокстера // Мат. сб. 2016 Т. 207, №11. С. 105-126.

S. Terzić

University of Montenegro
sterzic@ucg.ac.me

Universal space of parameters $\mathcal{F}_n$ for canonical T^n-action on Grassmannians $G_{n,2}$

In the focus of our talk is the canonical action of the compact torus T^n on the complex Grassmann manifolds $G_{n,2}$ of two-dimensional complex subspaces in $\mathbb{C}^n$ and the orbit spaces of this action. The main stratum $W_n \subset G_{n,2}$ given by those points from $G_{n,2}$ whose all Plücker coordinates are non-zero, plays a crucial role in describing the orbit space $G_{n,2}/T^n$, as it is an open dense set in $G_{n,2}$ and it belongs to any Plücker chart for $G_{n,2}$. In addition, we earlier proved that $W_n \cong \overset{\circ}{\Delta}_{n,2} \times F_n$, where $\Delta_{n,2}$ is the hypersimplex and $F_n = W_n/(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}P^N, N = \binom{n-2}{2}$ is an open algebraic manifold. Thus, there is a compactification $\overline{\overset{\circ}{\Delta}_{n,2} \times F_n} \cong G_{n,2}/T^n$.

In order to construct a model for this compactification one needs to find an appropriate compactification for F_n. It turns out that such a one will be the compactification $\mathcal{F}_n$ for F_n determined by the condition that any automorphism of F_n induced by the transition maps between the Plücker charts extends to the automorphism of $\mathcal{F}_n$. Such compactification $\mathcal{F}_n$ we call the universal space of parameters.

We obtain the space $\mathcal{F}_n$ by resolving singularities arising in the context of required extensions and by making use of the construction from algebraic geometry known as the wonderful compactification. Finally, we show that the space $\mathcal{F}_n$ coincides with moduli space $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ of stable n-pointed genus zero curves, which is is the Deligne-Mumford-Grothendieck-Knudsen compactification of the moduli space $\mathcal{M}(0,n)$ of n-pointed genus zero curves. In addition, the space $\overline{\mathcal{M}}(0,n)$ is proved by Kapranov to coincide with the Chow quotient $G_{n,2}/\!\!/(\mathbb{C}^*)^n$.

The talk is based on the results jointly obtained with Victor M. Buchstaber.

Н. В. Хорошавкина

НИУ ВШЭ, Международная лаборатория алгебраической топологии
и ее приложений
NadiaKho@yandex.ru

Теория графов для изучения потоков Тоды

Система Тоды — это динамическая система взаимодействия n точек, например, на прямой или окружности. Такую систему можно переписать в матричном виде как $LP - PL = L'$, где L — симметричная матрица коэффициентов уравнений системы, а P — кососимметричная матрица, построенная по L. В известных динамических системах, матрица L' повторяет форму матрицы L, что можно интерпретировать как существование замкнутого потока на пространстве решений — потока Тоды.

В докладе я расскажу о том, что такое интервальные графы, графы дуг окружности; при каких условиях про матрицу говорят, что она обладает свойством круговой совместимости единиц и о том, как все эти комбинаторные и матричные сюжеты помогают обобщить определение потока Тоды.

Р. А. Хрулев

МГУ им. М.В.Ломоносова
ra.khrulev@gmail.com

Кольца когомологий момент-угол комплексов, соответствующих срезанным кубам

В сообщении будут рассмотрены разные примеры многогранников, полученные отсечением части трехмерного куба плоскостью. Будет исследована топология их момент-угол многообразий с помощью вычисления их колец когомологий. Также будет показана разница в свойствах для операций срезки вершины и срезки ребра многогранника относительно топологии момент-угол многообразия.

Г. С. Черных

МЦМУ МИАН

aaa057721@gmail.com

SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и теория c_1-сферических бордизмов

В докладе будет рассказано об описании SU-линейных операций в ком- плексных кобордизмах, а именно, что все они выражаются в виде комбинаций геометрических операций ∂_i взятия подмногообразия, двойственного к степени первого класса Чженя $(c_1)^i$. Кроме того, будет рассказано о некоторых результатах, касающихся теории c_1-сферических бордизмов W_*, в частности, SU-линейных умножений и проекторов, а также комплексных ориентаций на W_* и соответствующих формальных групп.