

Последовательность $\{s_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ имеет *конечный ранг*, если обе бесконечные матрицы

$$\left(s_{m+n}s_{m-n}\right)\Big|_{m,n=-\infty}^{\infty}, \quad \left(s_{m+n+1}s_{m-n}\right)\Big|_{m,n=-\infty}^{\infty}$$

имеют конечный ранг.

Таким свойством обладают, например, многочлены и линейные рекуррентные последовательности. Интересней устроены другие последовательности конечного ранга. Из определения следует, что все они удовлетворяют квадратичным рекуррентным соотношениям вида

$$s_{n+k}s_n = \sum_{j=1}^{[k/2]} \alpha_j s_{n+k-j}s_{n+j},$$

с постоянными коэффициентами α_j и начальными условиями s_0, \dots, s_{k-1} .

Конечность ранга — сильное условие, которое означает, что последовательность удовлетворяет некоторой «теореме сложения». Например, за каждой последовательностью вида

$$s_{n+2}s_{n-2} = \alpha s_{n+1}s_{n-1} + \beta s_n^2$$

(ранга 2) стоит сложение точек на эллиптической кривой. Исследование свойств последовательностей конечного ранга приводит к задачам, лежащим на стыке алгебры, теории чисел и комбинаторики.