НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Шашки Фейнмана: введение

Ожегов Фёдор

HSE University

16 февраля 2023

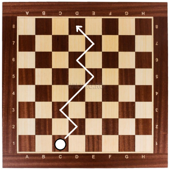
План

- Неформальное определение
- Примеры
- Точное определение
- Некоторые свойства модели
- Точное решение модели
- Непрерывный предел*

Базовая модель. Неформальное определение.

Рассмотрим бесконечную шахматную доску со стороной клетки ε. Шашка ходит на соседнюю по диагонали клетку, влево-вверх или вправо-вверх. Каждому пути s шашки сопоставим вектор $a(s)$:

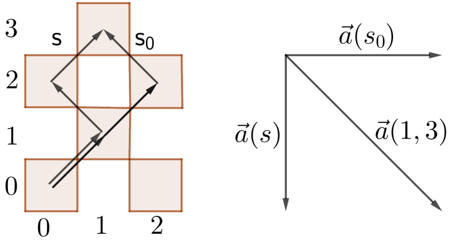
- В начале вектор направлен вверх и имеет длину 1
- поворот шашки $\to$ поворот вектора на 90° по часовой стрелке и домножение на $m\varepsilon$
- В конце движения вектор сжимается в $(1 + m^2\varepsilon^2)^{\frac{t/\varepsilon - 1}{2}}$ раз, где t/ε - общее число ходов шашки.



(by V. Skopenkova)

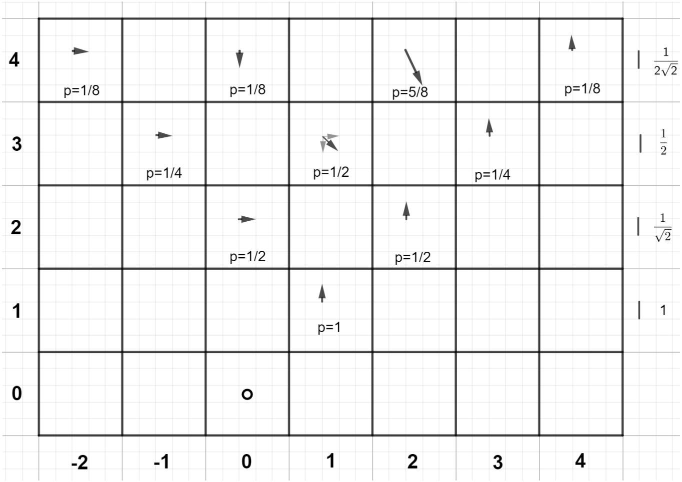
Базовая модель. Неформальное определение.

Обозначим $a(x,t,m,\varepsilon) := \sum_s a(s)$, где суммирование ведётся по всем путям шашки из клетки $(0,0)$ в клетку (x,t) , начинающихся с хода вправо-вверх. Квадрат длины вектора $a(x,t)$ называется *вероятностью обнаружения в клетке* (x,t) **электрона**, **испущенного из клетки** $(0,0)$, а сам вектор $a(x,t,m,\varepsilon)$ называется **стрелкой** или **волновой функцией**.



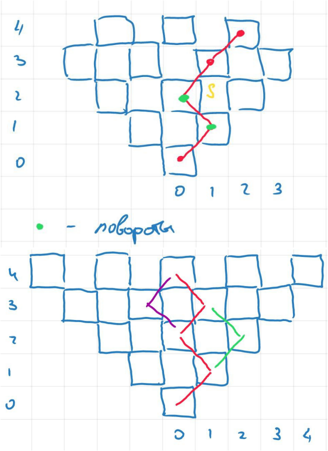
$$\overline{a}(1,3,1,1) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}),\ P(1,3,1,1) = \tfrac{1}{2}$$

Базовая модель. Значения при малых x, t



(by V. Skopenkova)

Некоторые примеры.



Определение 1. *Путь шашки* — конечная последовательность точек решетки $\varepsilon\mathbb{Z}^2 = \{(x,t) | x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z}\}$, что вектор из каждой точки (кроме последней) к следующей равен либо $(\varepsilon, \varepsilon)$, либо $(-\varepsilon, \varepsilon)$. *Поворот* — это такая точка пути (не первая и не последняя), что вектор, соединяющий эту точку с предыдущей, ортогонален вектору, соединяющему её со следующей. Обозначим через

$$a(x,t,m,\varepsilon) := (1+m^2\varepsilon^2)^{(\varepsilon-t)/2\varepsilon}\, i \sum_s (-im\varepsilon)^{\mathrm{turns}(s)}$$

сумму по всем путям $s = (s_0, s_1, \dots, s_{t/\varepsilon})$ шашки, у которых $s_0 = (0,0)$, $s_1 = (\varepsilon, \varepsilon)$, $s_{t/\varepsilon} = (x,t)$, где $\mathrm{turns}(s)$ — количество поворотов в пути s. Обозначим

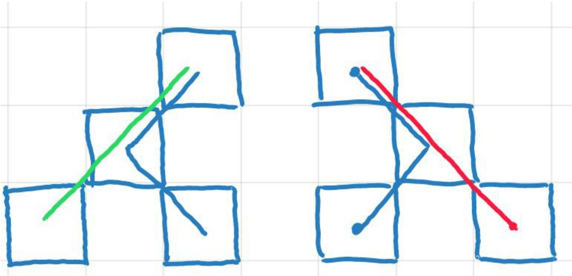
$$P(x,t,m,\varepsilon) = |a(x,t,m,\varepsilon)|^2$$
$$a_1(x,t,m,\varepsilon) = Re\ a(x,t,m,\varepsilon)$$
$$a_2(x,t,m,\varepsilon) = Im\ a(x,t,m,\varepsilon)$$

Лемма

Для действительных $m, \varepsilon \geq 0$ *и целых* $t/\varepsilon, x/\varepsilon$, *где* $t \geq |x|$ *выполнено:*

$$a_1(x,t,m,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\left(a_1(x+\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon) + m\varepsilon a_2(x+\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon)\right);$$

$$a_2(x,t,m,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\left(a_2(x-\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon) - m\varepsilon a_1(x-\varepsilon, t-\varepsilon, m, \varepsilon)\right).$$



Сохранение вероятности

Лемма

Для действительных $m, \varepsilon \geq 0$ *и целых* $t/\varepsilon > 0$ *выполнено:*

$$\sum_{x:(x+t)/\varepsilon \in 2\mathbb{Z}} P(x, t, m, \varepsilon) = 1$$

Доказательство.

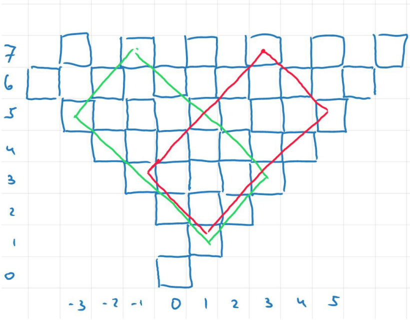
Докажем это утверждение по индукции для $m = \varepsilon = 1$. *База очевидна.*
Докажем переход.
Для этого заметим, что $P(x, t) = a_1^2(x, t) + a_2^2(x, t)$. *Также из уравнения Дирака имеем:*

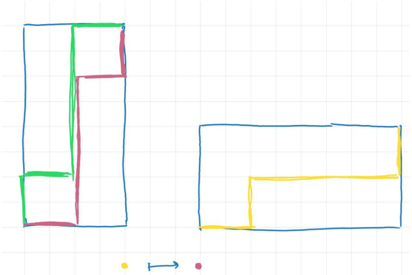
$$a_1^2(x, t) = \frac{1}{2}(a_1^2(x+1, t-1) + 2a_1(x+1, t-1)a_2(x+1, t-1) + a_2^2(x+1, t-1))$$
$$a_2^2(x, t) = \frac{1}{2}(a_1^2(x-1, t-1) - 2a_1(x-1, t-1)a_2(x+1, t-1) + a_2^2(x-1, t-1))$$

Предложение

Для действительных $m, \varepsilon \geq 0$ и целых $t/\varepsilon, x/\varepsilon$ выполнено:

$$a_1(x,t) = a(-x,t)$$





Явная формула.

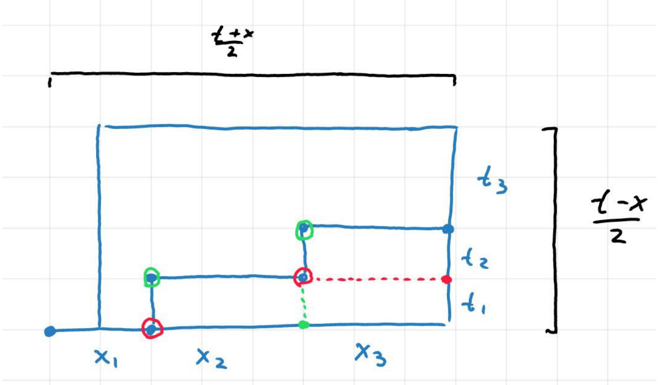
Предложение

Для действительных $m, \varepsilon \geq 0$ и целых $t/\varepsilon \geq |x/\varepsilon|$, таких, что $(t+x)/2\varepsilon \in \mathbb{Z}$ выполнено:

$$a_1(x,t,m,\varepsilon) = \frac{m\varepsilon}{(1+m^2\varepsilon^2)^{\frac{t-\varepsilon}{2\varepsilon}}} \sum_{r=0}^{\frac{x+t}{2\varepsilon}} \binom{\frac{x+t-2\varepsilon}{2\varepsilon}}{r} \binom{\frac{t-x-2\varepsilon}{2\varepsilon}}{r} (-m^2\varepsilon^2)^r$$

$$a_2(x,t,m,\varepsilon) = \frac{1}{(1+m^2\varepsilon^2)^{\frac{t-\varepsilon}{2\varepsilon}}} \sum_{r=1}^{\frac{x+t}{2\varepsilon}} \binom{\frac{x+t-2\varepsilon}{2\varepsilon}}{r} \binom{\frac{t-x-2\varepsilon}{2\varepsilon}}{r-1} (-m^2\varepsilon^2)^r$$

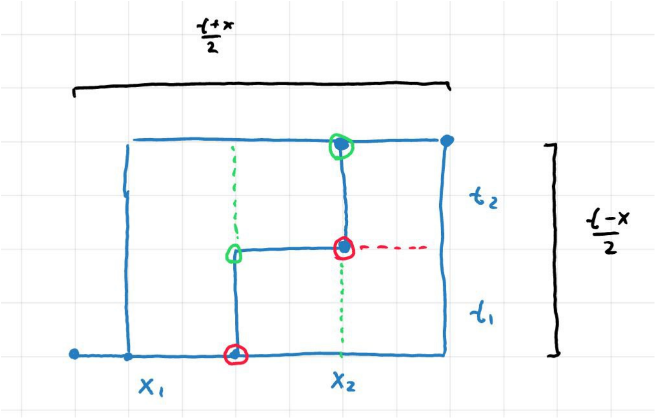
Доказательство явной формулы.



$$x_1 + \cdots + x_{r+1} = \frac{t+x}{2}$$

$$t_1 + \cdots + t_{r+1} = \frac{t-x}{2}$$

Доказательство явной формулы.



$$x_1 + \cdots + x_{r+1} = \frac{t+x}{2}$$

$$t_1 + \cdots + t_r = \frac{t-x}{2}$$

Theorem (Скопенков-Устинов 2022, Львов 2022, Нарликар 1971)

Для действительных $m, \varepsilon > 0, |x| < t$ *выполнено*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a_1 \left(2\varepsilon \left\lfloor \frac{x}{2\varepsilon} \right\rfloor, 2\varepsilon \left\lfloor \frac{t}{2\varepsilon} \right\rfloor, m, \varepsilon\right) = J_0\left(m\sqrt{t^2 - x^2}\right)$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} a_2 \left(2\varepsilon \left\lfloor \frac{x}{2\varepsilon} \right\rfloor, 2\varepsilon \left\lfloor \frac{t}{2\varepsilon} \right\rfloor, m, \varepsilon\right) = \sqrt{\frac{t+x}{t-x}} J_1\left(m\sqrt{t^2 - x^2}\right).$$

Здесь $J_0(z) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z/2)^{2j}}{(j!)^2}$ и $J_1(z) := \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z/2)^{2j+1}}{(j!)(j+1)!}$ *функции Бесселя* первого рода порядков 0 и 1 соответственно.