НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Модель "шашки Фейнмана" с поглощением

Дмитриев Михаил Дмитриевич

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук,
Скопенков Михаил Борисович

Известное соотношение

Предложение

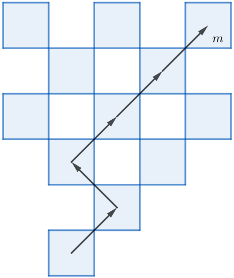
Для любых $(x, t) \in \mathbb{Z}^2$, *где* $t > 0$, *верно, что*

$$(t - x)a_2(x, t) = (t + x - 2)a_2(2 - x, t)$$

.

Комбинаторное доказательство соотношения

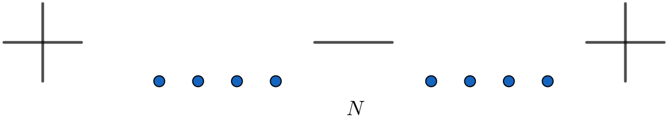
- Сопоставим каждому пути последовательность плюсов и минусов.
- *Плюсом* будем обозначать ход вправо-вверх, *минусом* ход влево-вверх.



$+-+++$

Комбинаторное доказательство соотношения

- Путем с отмеченным ходом влево будем называть пару из пути шашки в клетку (x, t) и числа N такому, что ход под номером N шашка делает влево-вверх.



Комбинаторное доказательство соотношения

Будем называть перестройкой пути следующее отображение:

• По пути m построим путь $\bar{m}$ путем инвертирования всех его ходов (заменяем плюсы на минусы, а минусы на плюсы).

• За $\widehat{m}$ обозначим перевернутый путь $\bar{m}$.

• Соответственно перестройкой назовём сопоставление пути m путь $\widehat{m}$.

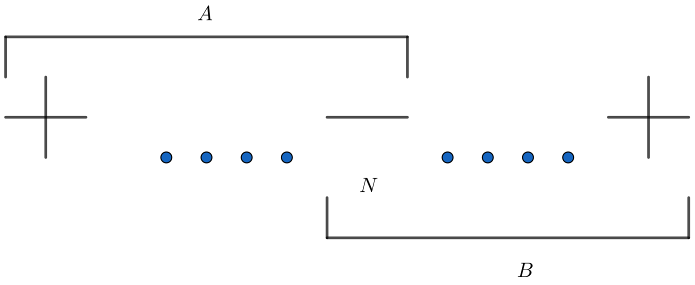
$$m = + \quad - \quad + \quad + \quad -$$

$$\bar{m} = - \quad + \quad - \quad - \quad +$$

$$\widehat{m} = + \quad - \quad - \quad + \quad -$$

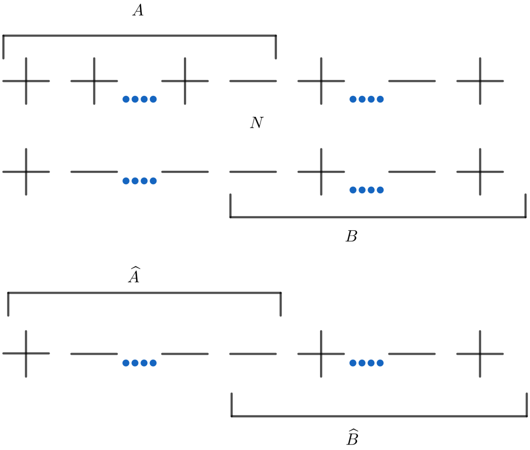
Комбинаторное доказательство соотношения

Далее будем рассматривать только пути дающие вклад в a_2 (т.е. с последним ходом вправо-вверх).
Рассмотрим некоторый путь шашки m с отмеченным ходом (влево) под номером N и выделим в нем подпути A и B.



Комбинаторное доказательство соотношения

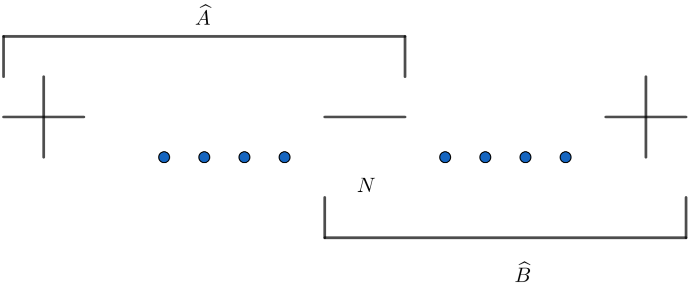
Применим перестройку к подпути A, а затем к подпути B. Обозначим полученный путь за m'.



Комбинаторное доказательство соотношения

Посчитаем в какую клетку приходит m':

- Он содержит ровно t ходов.
- Если m содержал $\frac{t+x}{2}$ плюсов, то m' содержит $\frac{t+x}{2} - 1$ минусов.
- Значит m' приходит в клетку $(2 - x, t)$.



Комбинаторное доказательство соотношения

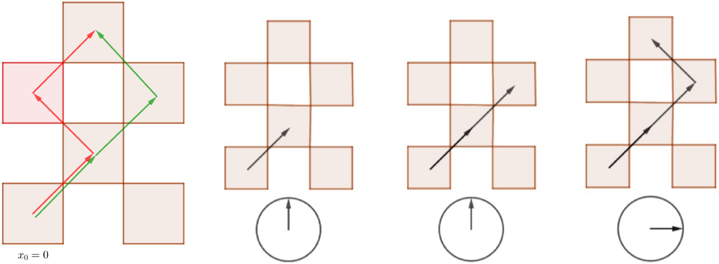
Сопоставление пути m путя m' биекция между путями с отмеченным ходом влево и дающими вклад в $a_2(x,t)$ и путями с отмеченным ходом влево и дающими вклад в $a_2(2-x,t)$.

Остается посчитать количесвто путей с отмеченным ходом влево. Получаем:

$$\frac{t-x}{2}a_2(x,t) = \frac{t+x-2}{2}a_2(2-x,t).$$

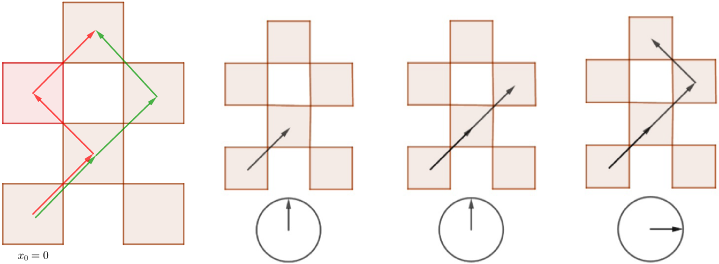
"Шашки Фейнмана с поглощением"

- Пусть шашка стоит на бесконечной клетчатой доске в клетке $(0, 0)$ и хочет добраться до (x, t).
- Рассмотрим все пути, состоящие из ходов вправо-вверх и влево-вверх, с первым ходом вправо-вверх и не проходящие через клетки вертикали $x = x_0$



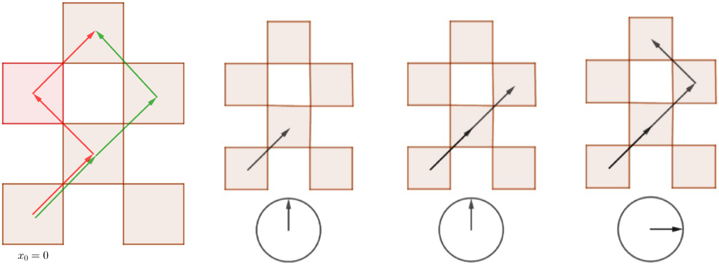
"Шашки Фейнмана"

- Каждому пути сопоставим стрелку (вектор длины 1), вычисленную так: сначала она смотрит вверх, а при каждом повороте она поворачивается на 90°.



"Шашки Фейнмана"

- $a(x, t \operatorname{bypass} x_0)$ - это сумма стрелок по всем путям с коэффициентом $2^{(1-t)/2}$.
- $|a(x, t \operatorname{bypass} x_0)|^2$ - это вероятность обнаружить электрон, испущенный из $(0, 0)$, в точке (x, t).
- Пример $a(1, 3 \operatorname{bypass} 0) = (\frac{1}{2}, 0)$



Определение модели

- *Путь шашки* — это конечная последовательность таких целых точек плоскости, что вектор из каждой точки (кроме последней) к следующей равен либо $(1,1)$, либо $(-1,1)$.
- *Поворот* — это такая точка пути (не первая и не последняя), что вектор, соединяющий эту точку с предыдущей, ортогонален вектору, соединяющему её со следующей. $\mathrm{turns}(s)$ — общее число поворотов в s.
- *Стрелка* — это комплексное число

$$a(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0) := 2^{(1-t)/2}\, i \sum_s (-i)^{\mathrm{turns}(s)},$$

где сумма берётся по всем путям s шашки из клетки $(0,0)$ в клетку (x,t), *начинающимся с хода вправо-вверх* и не проходящим через точки прямой $x = x_0$ кроме, быть может, начальной и конечной точки.

$$P(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0) := |a(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0)|^2.$$

Первые значения функции $a(x, t\,\mathrm{bypass}\,0)$

5		0		$\frac{1-2i}{4}$		$\frac{i}{4}$
4	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$\frac{1-i}{2\sqrt{2}}$		$\frac{i}{2\sqrt{2}}$	
3		$\frac{1}{2}$		$\frac{i}{2}$		
2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{i}{\sqrt{2}}$			
1		i				
$t = 0$						
	$x = 0$	1	2	3	4	5

Известный результат

Теорема (Амбаинис и др. 2001)

Для любого целого $t > 0$ выполнено

$$a(0, t \,\text{bypass}\, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & t = 2; \\ \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{(k+1)2^{2k+3/2}}, & t = 4k+4, \text{ где } k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Более того,

$$\sum_{t \in \mathbb{N}} P(0, t \,\text{bypass}\, 0) = \frac{2}{\pi}.$$

Замечание: Последнее выражение – это вероятность поглощения электрона в начальной точке.

Основная лемма

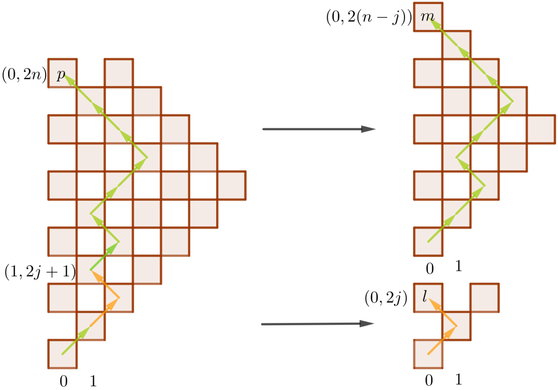
Лемма (М.Д. 2022)

Для любого целого $n > 2$ выполнено:

$$a(0, 2n \,\mathrm{bypass}\, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=2}^{n-2} a(0, 2(n-j) \,\mathrm{bypass}\, 0) a(0, 2j \,\mathrm{bypass}\, 0).$$

Доказательство леммы

Построим отображение F:



Доказательство леммы

Тогда при $j < n-1$ имеем

$$-\sqrt{2}\,a(p) = -i(-i)^{\mathrm{turns}(p)}2^{1-n} =$$

$$= i(-i)^{\mathrm{turns}(m)}2^{1/2-n+j}i(-i)^{\mathrm{turns}(l)}2^{1/2-j} = a(m)a(l),$$

так как путь p имеет такую же длину и на один поворот больше, чем l и m в сумме.
Если же $j = n-1$, то $\sqrt{2}\,a(p) = a(l)a(m)$, так как путь p имеет такую же длину и на один поворот меньше, чем l и m в сумме.

Доказательство леммы

Тогда, суммируя по всем путям p, получаем:

$$-\sqrt{2}\,a(0, 2n\,\mathrm{bypass}\,0) = \sum_{j=1}^{n-2} a(0, 2(n-j)\,\mathrm{bypass}\,0)a(0, 2j\,\mathrm{bypass}\,0) -$$

$$-a(0, 2(n-1)\,\mathrm{bypass}\,0)a(0, 2\,\mathrm{bypass}\,0) =$$

$$= \sum_{j=2}^{n-2} a(0, 2(n-j)\,\mathrm{bypass}\,0)a(0, 2j\,\mathrm{bypass}\,0).$$

Первое доказательство теоремы

Если n — четное больше двух, то

$$a(0, 2n \,\mathrm{bypass}\, 0) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \sum_{j=2}^{n-2} a(0, 2(n-j) \,\mathrm{bypass}\, 0) a(0, 2j \,\mathrm{bypass}\, 0) =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ четное}}}^{n-2} \frac{(-1)^{(n-j)/2-1}\binom{n-j-2}{(n-j)/2-1}}{((n-j)/2)2^{n-j-1/2}} \cdot \frac{(-1)^{j/2-1}\binom{j-2}{j/2-1}}{(j/2)2^{j-1/2}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n/2-1}\binom{n-2}{n/2-1}}{(n/2)2^{n-1/2}}.$$

Первое доказательство теоремы

Если же n — нечетное больше двух, то

$$a(0, 2n\,\text{bypass}\,0) = \frac{-2}{\sqrt{2}} \sum_{j=2}^{n-2} a(0, 2(n-j)\,\text{bypass}\,0) a(0, 2j\,\text{bypass}\,0) =$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{j=2 \\ j\ \text{четное}}}^{n-2} 0 \cdot \frac{(-1)^{j/2-1}\binom{j-2}{j/2-1}}{(j/2)2^{j-1/2}} = 0.$$

Второе доказательство

Пусть $A(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a(0, 2n \operatorname{bypass} 0) q^n$. Тогда из леммы:

$$A(q) = \frac{-1}{\sqrt{2}} A(q)^2 + qA(q) + \frac{q}{\sqrt{2}}.$$

Решая полученное уравнение относительно $A(q)$ получаем:

$$A(q) = \frac{q - 1 \pm \sqrt{1 + q^2}}{\sqrt{2}}.$$

Еще одно соотношение

Теорема

Для любых целых $x_0 \leqslant 0$ *и* $n > \max\{1 - x_0, 2\}$ *выполнено*

$$a(x_0, 2n{+}x_0 \operatorname{bypass} x_0) = \sum_{x=2}^{n} 2^{-x/2} \operatorname{Im} a(x_0{+}x, 2n{-}x{+}x_0 \operatorname{bypass} x_0) =$$

$$= -\sum_{x=2}^{n-1} 2^{-x/2-1} \operatorname{Re} a(x_0 + x, 2n - 2 - x + x_0 \operatorname{bypass} x_0).$$

Литература

- A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (2001), 37–49.
- R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965.
- M. Dmitriev, Feynman Checkers with Absorption, `https://arxiv.org/abs/2204.07861`
- M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.
- S.E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, Quantum Inf. Process. 11 (2012), 1015–1106.