НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Равномерная асимптотика волновой функции электрона в модели Шашки Фейнмана с электромагнитным полем

Ожегов Фёдор

HSE University

19 мая 2023

План

- Напоминание определения модели с полем
- Равномерная асимптотика
- Набросок доказательства
- Перенормировка массы

Модель с электромагнитным полем

Определение 1.
Зафиксируем ε и $m \geq 0$. Рассмотрим решетку $\varepsilon\mathbb{Z}^2 = \{(x,t) : x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z}\}$. Пусть u — отображение из $\{(x,t) : x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\}$ в $\{\pm 1\}$. Обозначим за

$$a(x,t,m,\varepsilon,u) :=$$

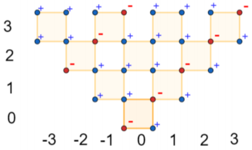
$$(1+m^2\varepsilon^2)^{(1-t/\varepsilon)/2} i \sum_s (-im\varepsilon)^{\mathrm{turns}(s)} u\left(\frac{s_0+s_1}{2}\right) u\left(\frac{s_1+s_2}{2}\right) \dots u\left(\frac{s_{t/\varepsilon-1}+s_{t/\varepsilon}}{2}\right)$$

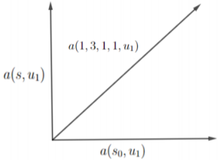
сумму по всем путям шашки $s = (s_0, s_1, \dots, s_{t/\varepsilon})$, таких, что $s_0 = (0,0)$, $s_1 = (\varepsilon, \varepsilon)$, $s_{t/\varepsilon} = (x,t)$.
Обозначим

$$a_1(x,t,m,\varepsilon,u) := \operatorname{Re} a(x,t,m,\varepsilon,u),$$
$$a_2(x,t,m,\varepsilon,u) := \operatorname{Im} a(x,t,m,\varepsilon,u).$$

Величина $|a(x,t,m,\varepsilon,u)|^2$ называется *вероятностью обнаружить электрон массой m в точке (x,t) на решетке с шагом ε, если он был испущен из точки $(0,0)$ и двигался в поле u.*

Модель с электромагнитным полем





Для целых x/ε, t/ε *однородное* поле u_ε задается формулой

$$u_\varepsilon(x+\varepsilon/2, t+\varepsilon/2) = \begin{cases} -1, & \text{если } (t-x)/4\varepsilon \in \mathbb{Z}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Модель с электромагнитным полем

$t \backslash x$							
4	$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$		$\frac{2+i}{2\sqrt{2}}$		$\frac{-1}{2\sqrt{2}}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}i$
3		$\frac{-1}{2}$		$\frac{1+i}{2}$		$\frac{-1}{2}i$	
2			$\frac{-1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}i$		
1				$-i$			
$t \backslash x$	-2	-1	0	1	2	3	4

Величины $a(x, t, 1, 1, u_1)$ в однородном поле при малых x и t.

Theorem

Для четных $x/2\varepsilon$ ***и*** $t/2\varepsilon+1$, $0<m\varepsilon<1$ ***и*** $\left|\frac{x}{t}\right| \le \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2}$ ***имеем***

$$a_1(x,t) =$$

$$= (-1)^{\left\lfloor \frac{x+t+4}{4\varepsilon} \right\rfloor} \frac{\sqrt{2}m^{1/2}\varepsilon(1+m^2\varepsilon^2)^{1/2}\,(-12\theta(x/t))^{1/6}}{((2+m^2\varepsilon^2)(1-(x/t)^2(1+m^2\varepsilon^2)^2))^{1/4}} \left(\frac{1}{t}\right)^{1/3} \mathrm{Ai}\left(-\left(-\frac{3}{2}\theta(x/t)t\right)^{2/3}\right) + O_{m,\varepsilon}\left(\frac{1}{t}\right),$$

где

$$\theta(v) := \frac{1}{2\varepsilon}\left(|v| \arccos \frac{|v|\sqrt{(1+m^2\varepsilon^2)^2-1}}{\sqrt{1-v^2}} - \arccos \frac{\sqrt{(1+m^2\varepsilon^2)^2-1}}{(1+m^2\varepsilon^2)\sqrt{1-v^2}}\right);$$

$$\mathrm{Ai}(\lambda) := \int_0^\infty \cos\left(\frac{x^3}{3}+\lambda x\right) dx.$$

Равномерная асимптотика

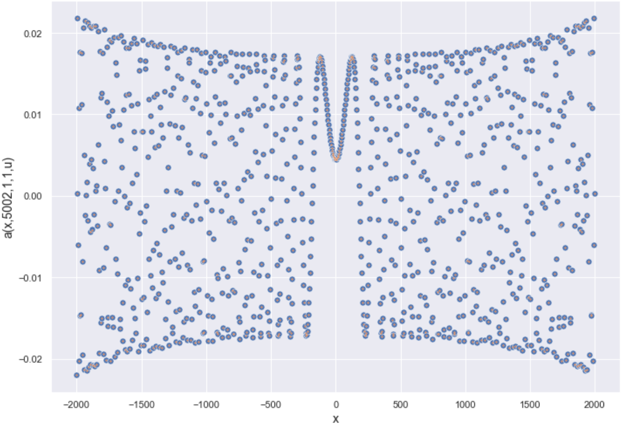


Рис.: График $a_1(x, 5002, 1, 1, u_1)$ для x делящегося на 4

Равномерная асимптотика

Proposition

Пусть $\omega_p := \frac{1}{2\varepsilon}\arcsin\frac{\sin 2p\varepsilon}{1+m^2\varepsilon^2}$. ***Тогда для любых*** $m > 0$ ***и*** $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, ***где*** $t > 0$, ***имеем***

$$a_1(x, t, m, \varepsilon, u_\varepsilon) =$$

$$= (-1)^{\frac{x}{2\varepsilon}+\left\lfloor\frac{x+t}{4\varepsilon}\right\rfloor}\frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\int\limits_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} e^{ipx}\cdot\frac{i\sin\omega_p(t-2\varepsilon)-\cos\omega_p t}{\cos 2\omega_p\varepsilon}\,dp, \qquad \textbf{\textit{при}}\ \frac{t}{\varepsilon}\equiv_4 2$$

Равномерная асимптотика

Theorem (P. Zakorko)

Пусть $f\colon [-U, U] \times [0, A] \to \mathbb{R}$ *аналитическая функция, такая, что:*

1. $f'_u(0,0) = 0$, $f''_{uu}(0,0) = 0$, $f'''_{uuu} \neq 0$, $f''_{\alpha,u}(0,0) \neq 0$;
2. $f(u,\alpha) = -f(-u,\alpha)$ *для всех* $u \in [-U, U]$ *и* $\alpha \in [0, A]$;
3. *при любых* $\alpha \in (0, A]$ *существует ровно два решения* $\pm u_0(\alpha) \in [-U, U]$ *уравнения* $f'_u(u,\alpha) = 0$, *где* $u_0(\alpha) \in (0, U)$, *кроме того* $f''_{uu}(u_0(\alpha), \alpha) > 0$;
4. *при* $\alpha = 0$ *существует единственное решение* $u_0(0) = 0$ *уравнения* $f'_u(u,\alpha) = 0$.

Пусть $g \in C^{\infty}[-U, U]$ *четная, а* t *действительное число большее* 0. *Тогда, при любых* $\alpha \geq 0$

$$\int_{-U}^{U} g(u) e^{itf(u,\alpha)} du = \frac{2\pi g(u_0)}{t^{1/3} h(\alpha)} Ai\left(-\left(-\frac{3}{2} f(u_0(\alpha),\alpha) t\right)^{2/3}\right) + O_{f,g}\left(\frac{1}{t}\right),$$

где

$$h(\alpha) := \begin{cases} \dfrac{f''_{uu}(u_0(\alpha),\alpha)^{1/2}}{(-12 f(u_0(\alpha),\alpha))^{1/6}}, & \text{если } 0 < \alpha \leq A, \\ \left(\dfrac{1}{2} f'''_{uuu}(0,0)\right)^{1/3}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Доказательство теоремы

Имеем следующую цепочку равенств:

$$a_1(x,t,m,\varepsilon,u_\varepsilon) = (-1)^{\frac{x}{2\varepsilon}+\left\lfloor\frac{x+t}{4\varepsilon}\right\rfloor} \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \int\limits_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} e^{iux} \frac{i\sin\omega_u(t-2\varepsilon)-\cos\omega_u t}{\cos 2\omega_u\varepsilon} du =$$

$$= (-1)^{\left\lfloor\frac{x+t+4\varepsilon}{4\varepsilon}\right\rfloor} \frac{m\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \int\limits_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{iux-\omega_u t}}{\cos 2\omega_u\varepsilon} du = (-1)^{\left\lfloor\frac{x+t+4\varepsilon}{4\varepsilon}\right\rfloor} \frac{m\varepsilon^2}{\pi\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \int\limits_{-\pi/2\varepsilon}^{\pi/2\varepsilon} \frac{e^{iu(x/t-\omega_u)t}}{\cos 2\omega_u\varepsilon} du$$

Здесь второе и третье равенство выполнены так как $\omega_u = -\omega_{u+\pi/2\varepsilon}$ и $e^{i(p+\pi/2\varepsilon)x} = e^{ipx}$ при $x \in 4\varepsilon\mathbb{Z}$.

Доказательство теоремы

Lemma

При $u \in [-\pi/2\varepsilon, \pi/2\varepsilon]$ ***и*** $\alpha \in \left[0, \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2}\right]$ ***функция***

$$f(u,\alpha) := u\left(\frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} - \alpha\right) - \arcsin\frac{\sin 2u\varepsilon}{1+m^2\varepsilon^2}$$

удовлетворяет условиям 1–4.

$$f'_u(u,\alpha) = \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} - \alpha - \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2}\cdot\frac{\cos 2u\varepsilon}{\cos 2\omega_u\varepsilon}$$

$$f''_{uu}(u,\alpha) = \frac{(1+m^2\varepsilon^2)^2-1}{(1+m^2\varepsilon^2)^3}\cdot\frac{2\varepsilon\sin 2u\varepsilon}{\cos^3 2\omega_u\varepsilon}$$

$$f'''_{uuu}(u,\alpha) = \frac{(1+m^2\varepsilon^2)^2-1}{(1+m^2\varepsilon^2)^5}\cdot\frac{4\varepsilon^2\cos 2u\varepsilon\left((1+m^2\varepsilon^2)^2 + 2\sin^2 2u\varepsilon\right)}{\cos^5 2\omega_u\varepsilon}$$

$$f''_{u\alpha} = -1$$

$$\pm u_0(\alpha) = \pm\frac{1}{2\varepsilon}\arccos v\sqrt{\frac{(1+m^2\varepsilon^2)^2-1}{1-v^2}}.$$

Здесь $v := \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} - \alpha$.

Доказательство теоремы

Имеем следующую цепочку равенств:

$$a_1(x,t,m,\varepsilon,u_\varepsilon) = (-1)^{\left\lfloor \frac{x+t+4\varepsilon}{4\varepsilon} \right\rfloor} \frac{m\varepsilon^2}{\pi\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} \int\limits_{-\pi/2\varepsilon}^{\pi/2\varepsilon} \frac{e^{iu(x/t-\omega_u)t}}{\cos 2\omega_u \varepsilon} du =$$

$$= (-1)^{\left\lfloor \frac{x+t+4}{4\varepsilon} \right\rfloor} \frac{\sqrt{2} m^{1/2}\varepsilon(1+m^2\varepsilon^2)^{1/2}\left(-12\theta(x/t)\right)^{1/6}}{((2+m^2\varepsilon^2)(1-(x/t)^2(1+m^2\varepsilon^2)^2))^{1/4}} \left(\frac{1}{t}\right)^{1/3} \mathrm{Ai}\left(-\left(-\frac{3}{2}\theta(x/t)t\right)^{2/3}\right) + O_{m,\varepsilon}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Здесь последнее равенство - применение теоремы для $f(u,\alpha) = u\left(\frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} - \alpha\right) - \arcsin\frac{\sin 2u\varepsilon}{1+m^2\varepsilon^2}$, $\alpha = \frac{1}{1+m^2\varepsilon^2} - \frac{x}{t}$ и $g(u) = \frac{1}{\cos 2\omega_u\varepsilon}$.

Сравнение с известными результатами.

Theorem (P. Zakorko)

При любых целых** x, t**, таких, что** $|x| < t/\sqrt{2}$ **и нечетном** $x + t$ **имеем:

$$a_1(x, t+1) = (-1)^{(|x|-t)/2}\left(\frac{4\theta(x/t)}{1-2(x/t)^2}\right)\left(\frac{1}{t}\right)^{1/3}\mathrm{Ai}\left(-\theta\left(x/t\right)t^{2/3}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

где $\theta(v) := \left(\frac{3}{2}\left(-|v|\arccos\left(\frac{|v|}{\sqrt{1-v^2}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2-2v^2}}\right)\right)\right)^{2/3}$

Сравним с $\tilde{\theta}(v)$ **при** $m = \varepsilon = 1$ **в нашей теореме.**

$$\tilde{\theta}(v) := \frac{1}{2}\left(|v|\arccos\frac{|v|\sqrt{3}}{\sqrt{1-v^2}} - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{1-v^2}}\right)$$

Спасибо за внимание!