Суперпортовые цепи

Светлана Широковских

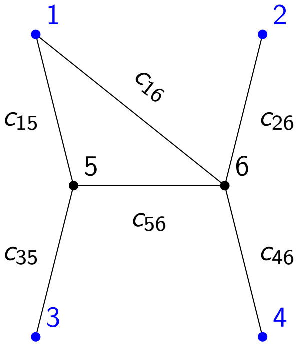
Студентка 4 курса
ВШЭ, Факультет математики

Научный руководитель — Скопенков Михаил Борисович

17.03.2023

Электрические цепи

- *Электрическая цепь с m входами* — связный взвешенный граф с положительными весами рёбер (*проводимостями*), m вершин которого отмечены (*граничные вершины*).
- c_{kl} — *проводимость* ребра kl. Если ребра kl нет, то $c_{kl} := 0$.

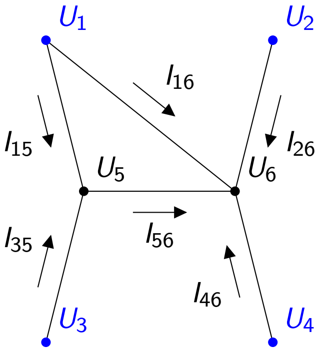


Нумерация:

- $1, \ldots, m$ — граничные вершины
- $m + 1 \ldots n$ — внутренние вершины

Замкнутые электрические цепи

Замкнутая электрическая цепь — электрическая цепь с m действительными числами $U_1 \dots U_m$ (*входными потенциалами*), сопоставленными граничным вершинам цепи.



Дано:

- $U_1 \dots U_m$ — входные потенциалы
- c_{kl} — проводимость ребра kl

Задаются аксиомами:

- U_k — потенциал внутренней вершины k
- I_{kl} — ток через ориентированное ребро kl

Электрические цепи: теорема существования и единственности

(C) *Закон Ома.* Для каждой пары вершин k, l выполнено равенство $I_{kl} = c_{kl}(U_k - U_l)$.

(I) *Правило Кирхгофа.* Для каждой вершины $k > m$ выполнено равенство $\sum_{l=1}^{n} I_{kl} = 0$.

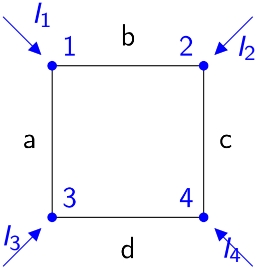
Числа U_k и I_{kl} однозначно определяются этими аксиомами, что утверждает следующая теорема.

Теорема

Для любой замкнутой электрической цепи система линейных уравнений (C),(I) *от переменных* U_k, *где* $m < k \leq n$, *и* I_{kl}, *где* $1 \leq k, l \leq n$, *имеет единственное решение.*

Электрические цепи: ответ

Числа $(I_1, \dots, I_m) := (\sum_{k=1}^n I_{1k}, \dots, \sum_{k=1}^n I_{mk})$ называются *входными токами*. *Ответом* электрической цепи называется отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$: $(U_1, \dots, U_m) \mapsto (I_1, \dots, I_m)$. Обозначим матрицу этого отображения через C.



(C) *Закон Ома.* $I_{kl} = c_{kl}(U_k - U_l)$:

$$\begin{cases} I_{12} = b(U_1 - U_2) \\ I_{13} = a(U_1 - U_3) \\ I_{24} = c(U_2 - U_4) \\ I_{34} = d(U_3 - U_4) \end{cases}$$

Электрические цепи: ответ

$$\begin{aligned}
I_1 &= I_{12} + I_{13} = (a+b)U_1 - bU_2 - aU_3\\
I_2 &= -I_{12} + I_{24} = -bU_1 + (b+c)U_2 - cU_4\\
I_3 &= -I_{13} + I_{34} = -aU_1 + (a+d)U_3\\
I_4 &= -I_{24} - I_{34} = -cU_2 - dU_3 + (c+d)U_4
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a+b & -b & -a & 0\\ -b & b+c & 0 & -c\\ -a & 0 & a+d & -d\\ 0 & -c & -d & c+d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1\\ U_2\\ U_3\\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\\ I_2\\ I_3\\ I_4 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{det}(C) = \begin{vmatrix} a+b & -b & -a\\ -b & b+c & 0\\ -a & 0 & a+d \end{vmatrix} = abc + abd + acd + bcd$$

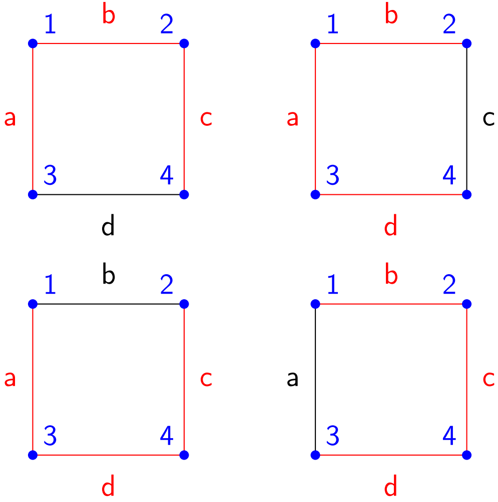
Валидные леса для электрической цепи

Рассмотрим такое отношение эквивалентности на вершинах графа электрической цепи, что любые две различные вершины эквивалентны тогда и только тогда, когда они граничные.

Валидными лесами для электрической цепи (не все вершины которой граничные) назовём такие леса в графе электрической цепи, которые становятся остовными деревьями после факторизации по этому отношению эквивалентности. Для электрической цепи, все вершины которой граничные, валидным лесом будем считать пустой подграф.

Весом леса назовём произведение проводимостей ребер, которые он содержит. Пустое произведение считаем равным 1. Обозначим вес леса H через $w(H)$.

$$\widetilde{det}(C) = abc + abd + acd + bcd$$



Матричная теорема Кирхгофа о деревьях

Теорема

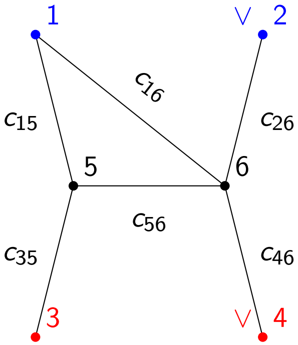
Пусть дана электрическая цепь с $m \geq 2$ *входами и матрицей ответа* C*. Тогда:*

$$\widetilde{det}(C) = \frac{\sum w(T)}{\sum w(H)},$$

где сумма в знаменателе берется по всем валидным для электрической цепи лесам H*, а в числителе — по всем остовным деревьям* T *в графе электрической цепи.*

Суперпортовые цепи

- *Суперпортовая цепь с m входами и p суперпортами* — электрическая цепь с m входами, граничные вершины которой разбиты на непустые непересекающиеся множества $A_1, \ldots, A_p$ (*суперпорты*).
- c_{kl} — *проводимость* ребра kl. Если ребра kl нет, то $c_{kl} := 0$.



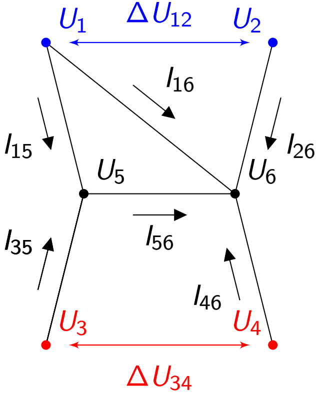
Нумерация:

- $1, \ldots, m$ — граничные вершины
- $m+1 \ldots n$ — внутренние вершины

Корни — вершины с максимальными номерами в каждом суперпорту, $root(x) = y$, если $x, y \in A_i$ и y — корень.

Замкнутые суперпортовые цепи

Замкнутая суперпортовая цепь — суперпортовая цепь с $m - p$ действительными числами ΔU_{xy} (*разностями входных потенциалов*), сопоставленными некорневым граничным вершинам x, где $y = root(x)$.



Дано:

- $\Delta U_{x,root(x)}$ — разность входных потенциалов для некорневой вершины x
- c_{kl} — проводимость ребра kl

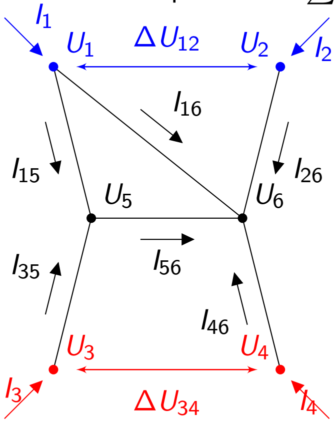
Задаются аксиомами:

- U_k — потенциал вершины k
- I_{kl} — ток через ориентированное ребро kl

Замкнутые суперпортовые цепи

(C) *Закон Ома.* Для каждой пары вершин k, l выполнено равенство $I_{kl} = c_{kl}(U_k - U_l)$.

(I) *Правило Кирхгофа.* Для каждой вершины $k > m$ выполнено равенство $\sum_{l=1}^{n} I_{kl} = 0$.



Током, входящим в вершину k, назовём число $I_k := \sum_{l=1}^{n} I_{kl}$.

(S) *Условие изолированности суперпортов.* Для любого $i < p : \sum_{k \in A_i} I_k = 0$.

(B) *Граничные условия.* Для любой некорневой вершины x: $U_x - U_{root(x)} = \Delta U_{x,root(x)}$.

Суперпортовые цепи: теорема существования и единственности

Теорема

Для любой замкнутой суперпортовой цепи существуют единственные числа I_{kl}, $1 \le k, l \le n$, *и единственные с точностью до добавления общей постоянной числа* U_k, $1 \le k \le n$, *удовлетворяющие свойствам (C), (I), (S), (B).*

Суперпортовые цепи: примеры

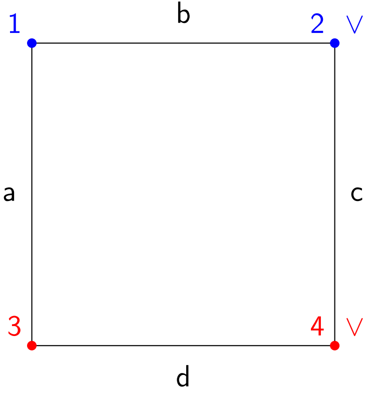
- Цепь с ровно одним суперпортом по сути эквивалента обычной электрической цепи. Действительно, если в суперпортовой цепи суперпорт всего один, то для замкнутой суперпортовой цепи известна $m-1$ разность входных потенциалов. И если зафиксировать потенциал одной из вершин, то будут заданы все входные потенциалы, и получится замкнутая электрическая цепь.
- Если все суперпорты состоят из ровно двух вершин, то получается *многопортовая цепь* (или *многополюсник*). Таким цепям посвящена обширная инженерная литература.

Суперпортовые цепи: ответ

Пусть $x_1 < \dots < x_{m-p}$ — номера некорневых вершин. *Ответом* суперпортовой цепи называется отображение $\mathbb{R}^{m-p} \to \mathbb{R}^{m-p}$:

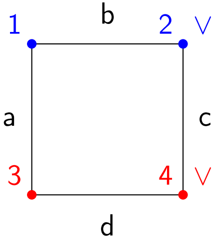
$$(\Delta U_{x_1 root(x_1)}, \dots, \Delta U_{x_{m-p} root(x_{m-p})}) \mapsto (I_{x_1}, \dots, I_{x_{m-p}}).$$

Обозначим матрицу ответа через L.



Для цепи слева: $(\Delta U_{12}, \Delta U_{34}) \mapsto (I_1, I_3)$

Суперпортовые цепи: ответ



(C) *Закон Ома.* $I_{kl} = c_{kl}(U_k - U_l)$:

$$\begin{cases} I_{12} = b(U_1 - U_2) \\ I_{13} = a(U_1 - U_3) \\ I_{24} = c(U_2 - U_4) \\ I_{34} = d(U_3 - U_4) \end{cases}$$

(S) *Условие изолированности суперпортов.* Для любого $i < p$: $\sum_{k \in A_i} \sum_{l=1}^{n} I_{kl} = 0$: $I_{13} + I_{24} = 0$.

(B) *Граничные условия.* Для любой некорневой вершины x:

$$U_x - U_{root(x)} = \Delta U_{x,root(x)}: \begin{cases} \Delta U_{12} = U_1 - U_2 \\ \Delta U_{34} = U_3 - U_4 \end{cases}$$

Input

$$\{I_{12} = b\,(U_1 - U_2),\ I_{13} = a\,(U_1 - U_3),\ I_{24} = c\,(U_2 - U_4),$$
$$I_{34} = d\,(U_3 - U_4),\ I_{13} + I_{24} = 0,\ U_1 - U_2 = D_{12},\ U_3 - U_4 = D_{34},\ U_1 = 0\}$$

Solutions

$$I_{12} = b\,D_{12}\,,\quad a + c \neq 0\,,\quad I_{13} = \frac{a\,c\,D_{12} - a\,c\,D_{34}}{a + c}\,,$$
$$I_{24} = \frac{a\,c\,D_{34} - a\,c\,D_{12}}{a + c}\,,\quad I_{34} = d\,D_{34}\,,\quad U_1 = 0\,,\quad U_2 = -D_{12}\,,$$
$$a \neq 0\,,\quad U_3 = \frac{c\,D_{34} - c\,D_{12}}{a + c}\,,\quad U_4 = \frac{-a\,D_{34} - c\,D_{12}}{a + c}$$

$$I_1 = I_{12} + I_{13} = b\Delta U_{12} + \frac{ac}{a+c}(\Delta U_{12} - \Delta U_{34})$$
$$= \frac{ab + bc + ac}{a+c}\Delta U_{12} + \frac{-ac}{a+c}\Delta U_{34}$$

$$I_3 = -I_{13} + I_{34} = \frac{ac}{a+c}(-\Delta U_{12} + \Delta U_{34}) + d\Delta U_{34}$$
$$= \frac{-ac}{a+c}\Delta U_{12} + \frac{ac + ad + cd}{a+c}\Delta U_{34}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{ab+bc+ac}{a+c} & \frac{-ac}{a+c} \\ \\ \frac{-ac}{a+c} & \frac{ac+ad+cd}{a+c} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta U_{12} \\ \\ \Delta U_{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ \\ I_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(L) = \frac{abc + abd + acd + bcd}{a + c}$$

Валидные леса

Рассмотрим такое отношение эквивалентности на вершинах суперпортовой цепи, что любые две различные вершины эквивалентны тогда и только тогда, когда они лежат в одном суперпорту.
Обозначим это отношение эквивалентности через $\sim$.
Валидными лесами назовём такие леса в суперпортовой цепи, которые становятся остовными деревьями после факторизации по этому отношению эквивалентности.

Матричная теорема Кирхгофа о деревьях для суперпортовой цепи

Теорема

Пусть дана суперпортовая цепь с матрицей ответа L. Тогда:

$$\det L = \frac{\sum w(T)}{\sum w(F)},$$

где сумма в знаменателе по всем валидным лесам F, а в числителе по всем остовным деревьям T в графе суперпортовой цепи.

Теорема

Для любой замкнутой суперпортовой цепи существуют единственные числа I_{kl}, $1 \le k, l \le n$, и единственные с точностью до добавления общей постоянной числа U_k, $1 \le k \le n$, удовлетворяющие свойствам (C), (I), (S), (B).

Лемма

Предположим, что числа U_k, где $1 \le k \le n$, и I_{kl}, где $1 \le k, l \le n$, удовлетворяют закону Ома (C) *и правилу Кирхгофа* (I). *Тогда*

$$\sum_{1 \le k < l \le n} (U_k - U_l) I_{kl} = \sum_{1 \le u \le m} U_u I_u.$$

Доказательство теоремы о существовании и единственности.

Легко видеть, что набор токов I_{kl} и потенциалов U_k удовлетворяет свойствам (C), (I), (S), (B) тогда и только тогда, когда им удовлетворяет набор токов I_{kl} и потенциалов $U_k + \mathrm{const}$. Поэтому будем доказывать существование и единственность решения с дополнительным условием $U_m = 0$.

Единственность. Предположим, что два набора токов $I_{kl}^{I,II}$ и потенциалов $U_k^{I,II}$ подчиняются (C), (I), (S), (B) и $U_m^I = U_m^{II} = 0$ при некоторых разностях входных потенциалов $(\Delta U_{xy}{}^I = \Delta U_{xy}{}^{II})$.
Тогда их разность $I_{kl} = I_{kl}^I - I_{kl}^{II}$ и $U_k = U_k^I - U_k^{II}$ подчиняется (C), (I), (S), (B) при нулевых разностях входных потенциалов $\Delta U_{xy} = 0$ для всех некорневых вершин x и $y = root(x)$. Тогда для любой граничной вершины x выполняется $U_x = U_{root(x)}$. Таким образом, в пределах одного суперпорта все потенциалы одинаковые.

Из (S) следует, что $\sum\limits_{k \in A_i} I_k = 0$ для любого суперпорта A_i. Тогда $\sum\limits_{k \in A_i} U_k I_k = 0$, так как $U_x = U_{root(x)}$. Получаем, что $\sum_{u=1}^{m} U_u I_u = 0$.
По лемме:

$$\sum_{1 \le k < l \le n} (U_k - U_l)^2 c_{kl} = \sum_{1 \le k < l \le n} (U_k - U_l) I_{kl} = \sum_{1 \le u \le m} U_u I_u = 0.$$

Для всех k, l либо $c_{kl} > 0$, либо $c_{kl} = 0$. Таким образом, каждое слагаемое $c_{kl}(U_k - U_l)^2 = 0$. Поскольку граф связный, все потенциалы U_k равны между собой. Но $U_m = U_m^I - U_m^{II} = 0$. Следовательно, $U_k = 0$, $I_{kl} = 0$, и поэтому $I_{kl}^I = I_{kl}^{II}$, $U_k^I = U_k^{II}$ для всех k, l.

Существование. Количество уравнений в системе (C), (I), (S), (B) равно количеству неизвестных (при фиксированном $U_m = 0$). Мы доказали, что эта система имеет единственное решение при $\Delta U_{xy} = 0$ для всех некорневых вершин x и $y = root(x)$. По конечномерной альтернативе Фредгольма она имеет решение для любых разностей входных потенциалов ΔU_{xy}.

$\square$

Назовем набор строк или столбцов $\{i_1, \ldots, i_{p-1}\}$ *валидным*, если он удовлетворяет условию $i_k \in A_k$ для всех $k = 1, \ldots, p-1$. *Валидным минором* назовем минор C_I^J, образованный валидным набором строк I и валидным набором столбцов J.

Лемма

Пусть дана суперпортовая цепь с p суперпортами. Рассмотрим электрическую цепь с таким же графом и такими же проводимостями рёбер, как у суперпортовой цепи. Обозначим через L и C матрицы ответа этих суперпортовой и электрической цепей соответственно. Тогда верно следующее равенство:

$$\det L = \frac{\widetilde{\det} C}{\sum C_I^J},$$

где сумма в знаменателе берется по всем валидным минорам C_I^J.

Теорема

Пусть у электрической цепи и суперпортовой цепи один и тот же граф с одними и теми же проводимостями ребер. Мы можем преобразовать матрицу ответа C электрической цепи в матрицу ответа L суперпортовой цепи с помощью следующего алгоритма:

Шаг 1: *Удалим последнюю строку и столбец из матрицы C и обратим получившуюся матрицу.*

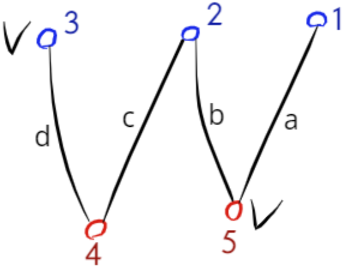
Шаг 2: *Для каждой некорневой вершины x с корнем $root(x) \neq m$ вычтем столбец $root(x)$ из столбца x.*

Шаг 3: *Для каждой некорневой вершины x с корнем $root(x) \neq m$ вычтем строку $root(x)$ из строки x.*

Шаг 4: *Для каждого корня $x \neq m$ удалим строку x и столбец x из полученной матрицы.*

Шаг 5: *Обратим матрицу. Полученная матрица — это L.*

Пример



$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & b+c & 0 & -c & -b \\ 0 & 0 & d & -d & 0 \\ 0 & -c & -d & c+d & 0 \\ -a & -b & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Шаг 1

Удалим последнюю строку и столбец из матрицы C и обратим получившуюся матрицу.

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b+c & 0 & -c \\ 0 & 0 & d & -d \\ 0 & -c & -d & c+d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ 0 & \frac{1}{b} & \frac{bc+bd+cd}{bcd} & \frac{b+c}{bc} \\ 0 & \frac{1}{b} & \frac{b+c}{bc} & \frac{b+c}{bc} \end{pmatrix}.$$

Шаг 2

Вычтем столбец 3 из столбцов 1 и 2.

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\
0 & \frac{1}{b} & \frac{bc+bd+cd}{bcd} & \frac{b+c}{bc} \\
0 & \frac{1}{b} & \frac{b+c}{bc} & \frac{b+c}{bc}
\end{pmatrix}
-
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\
\frac{bc+bd+cd}{bcd} & \frac{bc+bd+cd}{bcd} & 0 & 0 \\
\frac{b+c}{bc} & \frac{b+c}{bc} & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
=
\begin{pmatrix}
\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\
-\frac{bc+bd+cd}{bcd} & -\frac{c+d}{cd} & \frac{bc+bd+cd}{bcd} & \frac{b+c}{bc} \\
-\frac{b+c}{bc} & -\frac{1}{c} & \frac{b+c}{bc} & \frac{b+c}{bc}
\end{pmatrix}
$$

Шаг 3

Вычтем строку 3 из строк 1 и 2.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{b} & 0 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ -\frac{bc+bd+cd}{bcd} & -\frac{c+d}{cd} & \frac{bc+bd+cd}{bcd} & \frac{b+c}{bc} \\ -\frac{b+c}{bc} & -\frac{1}{c} & \frac{b+c}{bc} & \frac{b+c}{bc} \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} -\frac{bc+bd+cd}{bcd} & -\frac{c+d}{cd} & \frac{bc+bd+cd}{bcd} & \frac{b+c}{bc} \\ -\frac{bc+bd+cd}{bcd} & -\frac{c+d}{cd} & \frac{bc+bd+cd}{bcd} & \frac{b+c}{bc} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd} & \frac{c+d}{cd} & -\frac{bc+bd+cd}{bcd} & -\frac{b+c}{bc} \\ \frac{c+d}{cd} & \frac{c+d}{cd} & -\frac{c+d}{cd} & -\frac{1}{c} \\ -\frac{bc+bd+cd}{bcd} & -\frac{c+d}{cd} & \frac{bc+bd+cd}{bcd} & \frac{b+c}{bc} \\ -\frac{b+c}{bc} & -\frac{1}{c} & \frac{b+c}{bc} & \frac{b+c}{bc} \end{pmatrix}$$

Шаг 4 и 5

Удалим строку 3 и столбец 3. Обратим матрицу. Полученная матрица — это L.

$$\begin{pmatrix} \frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd} & \frac{c+d}{cd} & -\frac{b+c}{bc} \\ \frac{c+d}{cd} & \frac{c+d}{cd} & -\frac{1}{c} \\ -\frac{b+c}{bc} & -\frac{1}{c} & \frac{b+c}{bc} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{ab+ac+ad}{a+b+c+d} & -\frac{ab+ac}{a+b+c+d} & \frac{ac+ad}{a+b+c+d} \\ -\frac{ab+ac}{a+b+c+d} & \frac{ab+ac+bd+cd}{a+b+c+d} & \frac{-ac+bd}{a+b+c+d} \\ \frac{ac+ad}{a+b+c+d} & \frac{-ac+bd}{a+b+c+d} & \frac{ac+bc+ad+bd}{a+b+c+d} \end{pmatrix}$$

Доказательство

Рассмотрим композицию ограничения ответа электрической цепи на подпространство $U_m = 0$ и проекции на подпространство $I_m = 0$. Матрица этого отображения $(U_1, \ldots, U_{m-1}) \mapsto (I_1, \ldots, I_{m-1})$ получается из матрицы C удалением последней строки и столбца. Из части матричной теоремы Кирхгофа следует, что полученная матрица обратима. Обратная матрица задает отображение $(I_1, \ldots, I_{m-1}) \mapsto (U_1, \ldots, U_{m-1})$, и именно она получается после шага 1 алгоритма из теоремы.

Далее, сделаем следующую замену координат в пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$:

$$I'_x = \begin{cases} I_x, & \text{при } x \neq root(x), \\ \sum\limits_{k:root(k)=x} I_k, & \text{при } x = root(x). \end{cases}$$

Матрица отображения $(I'_1, \dots, I'_{m-1}) \mapsto (U_1, \dots, U_{m-1})$ получается из матрицы отображения $(I_1, \dots, I_{m-1}) \mapsto (U_1, \dots, U_{m-1})$ вычитанием столбца $root(x)$ из столбца x для всех некорневых вершин x с корнем $root(x) \neq m$, как в шаге 2 алгоритма.

Положим $U_m := 0$ и сделаем замену координат

$$U'_x = \begin{cases} U_x - U_{root(x)}, & \text{при } x \neq root(x), \\ U_x, & \text{при } x = root(x). \end{cases}$$

Тогда отображение $(I'_1, \dots, I'_{m-1}) \mapsto (U'_1, \dots, U'_{m-1})$ получается из отображения $(I'_1, \dots, I'_{m-1}) \mapsto (U_1, \dots, U_{m-1})$ вычитанием строки $root(x)$ из строки x для всех некорневых вершин x с корнем $root(x) \neq m$, как в шаге 3 алгоритма.

Рассмотрим композицию ограничения отображения $(I'_1, \ldots, I'_{m-1}) \mapsto (U'_1, \ldots, U'_{m-1})$ на подпространство, заданное уравнениями вида $I'_x = 0$ для каждого корня $x \neq m$, и проекции на подпространство, заданное уравнениями вида $U'_x = 0$ для каждого корня $x \neq m$. Матрица этого отображения $(I'_{x_1}, \ldots, I'_{x_{m-p}}) \mapsto (U'_{x_1}, \ldots, U'_{x_{m-p}})$ получается удалением строки x и столбца x для каждого корня $x \neq m$, как в шаге 4 алгоритма. Это отображение равно $(I_{x_1}, \ldots, I_{x_{m-p}}) \mapsto (U_{x_1} - U_{root(x_1)}, \ldots, U_{x_{m-p}} - U_{root(x_{m-p})})$, так как для всех некорневых вершин x выполняется $I'_x = I_x$ и $U'_x = U_x - U_{root(x)}$.

Заметим, что композиция этого отображения и ответа суперпортовой цепи равна тождественному отображению. Действительно, в суперпортовой цепи при разностях входных потенциалов $(\Delta U_{x_1 root(x_1)}, \dots, \Delta U_{x_{m-p} root(x_{m-p})}) = (U_{x_1} - U_{root(x_1)}, \dots, U_{x_{m-p}} - U_{root(x_{m-p})})$ всем аксиомам (C),(I),(S),(B) удовлетворяют те же самые потенциалы (с точностью до прибавления константы) и те же самые токи, которые получаются в замкнутой электрической цепи с входными потенциалами $(U_1, \dots, U_m)$. Аксиома (B) выполняется, так как мы брали $\Delta U_{x_i root(x_i)} = U_{x_i} - U_{root(x_i)}$. Аксиомы (C) и (I) выполняются, поскольку они выполняются и для электрической цепи. Аксиома (S) выполняется, так как рассматриваем ограничение на подпространство, заданное уравнениями вида $I'_x = 0$ для каждого корня $x \neq m$, а значит, $\sum\limits_{k:root(k)=x} I_k = 0$. Таким образом, композиция отображений тождественна — она переводит вектор токов $(I_{x_1}, \dots, I_{x_{m-p}})$ в себя.

Так как матрица отображения
$(I_{x_1}, \ldots, I_{x_{m-p}}) \mapsto (U_{x_1} - U_{root(x_1)}, \ldots, U_{x_{m-p}} - U_{root(x_{m-p})})$,
которое получилось после 4 шага, квадратная, то она обратима, а обратная матрица — это матрица L.

$\square$

Назовем набор строк или столбцов $\{i_1, \ldots, i_{p-1}\}$ *валидным*, если он удовлетворяет условию $i_k \in A_k$ для всех $k = 1, \ldots, p-1$. *Валидным минором* назовем минор C_I^J, образованный валидным набором строк I и валидным набором столбцов J.

Лемма (1)

Пусть дана суперпортовая цепь с p суперпортами. Рассмотрим электрическую цепь с таким же графом и такими же проводимостями рёбер, как у суперпортовой цепи. Обозначим через L и C матрицы ответа этих суперпортовой и электрической цепей соответственно. Тогда верно следующее равенство:

$$\det L = \frac{\widetilde{\det} C}{\sum C_I^J},$$

где сумма в знаменателе берется по всем валидным минорам C_I^J.

Пусть дана суперпортовая цепь. Рассмотрим электрическую цепь с таким же графом и такими же проводимостями рёбер, как у суперпортовой цепи. Обозначим через L и матрицы ответа этих суперпортовой и электрической цепей соответственно.
Будем доказывать, что верно следующее равенство:

$$\det L = \frac{\widetilde{\det} C}{\sum\limits_{I,J} C_I^J},$$

где сумма в знаменателе берется по всем валидным наборам I, J. По определению валидного минора это именно то, что нам требуется.
Через X, Y и Z соответственно обозначим матрицы, которые получаются после шагов 1, 2 и 3 в алгоритме.
Обозначим множество всех корней через $R = \{r_1, \ldots, r_p\}$, где через r_k будем обозначать номер корня в порту A_k (то есть $r_k := \sum\limits_{i}^{k} |A_i|$). Обозначим множество граничных вершин через M.

Выпишем цепочку равенств, доказывающих лемму, а затем покажем, почему выполняется каждое из них:

$$
\begin{aligned}
\det L^{-1} &\overset{(1)}{=} \det Z_{M\setminus R}^{M\setminus R} \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=r_1+1}^{r_2} \cdots \sum_{i_{p-1}=r_{p-2}+1}^{r_{p-1}} \prod_{t=1}^{p-1} (-1)^{r_t-i_t} \det Y_{M\setminus\{i_1,i_2,i_3,\dots i_{p-1}\}}^{M\setminus R} \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{I\text{ — валидный набор}} (-1)^{\sum\limits_{t=1}^{p-1} r_t+\sum\limits_{i\in I} i} \det Y_{M\setminus I}^{M\setminus R} \\
&\overset{(4)}{=} \sum_{I,J\text{ — валидные наборы}} (-1)^{\sum\limits_{i\in I} i+\sum\limits_{j\in J} j} \det X_{M\setminus I}^{M\setminus J} \\
&\overset{(5)}{=} \sum_{I,J\text{ — валидные наборы}} \frac{\det(X^{-1})_I^J}{\det X^{-1}} \overset{(6)}{=} \frac{\sum\limits_{I,J\text{ — валидные наборы}} C_I^J}{\widetilde{\det C}}.
\end{aligned}
$$

$$\det L^{-1} \overset{(1)}{=} \det Z_{M\setminus R}^{M\setminus R}$$

(1) По шагу 4 и 5 алгоритма.

$$\det Z^{M\setminus R}_{M\setminus R}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=r_1+1}^{r_2} \cdots \sum_{i_{p-1}=r_{p-2}+1}^{r_{p-1}} \prod_{t=1}^{p-1} (-1)^{r_t - i_t} \det Y^{M\setminus R}_{M\setminus\{i_1, i_2, i_3, \ldots i_{p-1}\}}$$

(2) Для каждого корня $x \neq m$ удалим столбец x из матрицы Y. Строки полученной матрицы обозначим через $y_1, \ldots, y_{m-1}$. Вычтем из строк $y_1 \ldots y_{r_1-1}$ строку y_{r_1} и для каждого корня $x \neq m$ удалим строку x. Через $e_1 \ldots e_{m-p}$ обозначим стандартный базис в $\mathbb{R}^{m-p}$.

Определитель получившейся матрицы равен:

$$\frac{(y_1 - y_{r_1}) \wedge (y_2 - y_{r_1}) \wedge \cdots \wedge (y_{r_1-1} - y_{r_1}) \wedge (y_{r_1+1} \wedge \cdots \wedge y_{m-1})}{e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{m-p}}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{\sum_{i_1=1}^{r_1} (-1)^{r_1-i_1} (y_1 \wedge \cdots \wedge y_{i_1-1} \wedge y_{i_1+1} \wedge \cdots \wedge y_{r_1}) \wedge (y_{r_1+1} \wedge \ldots y_{m-1})}{e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{m-p}}$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{i_1=1}^{r_1} (-1)^{r_1-i_1} \det Y^{M\setminus R}_{M\setminus R \cup \{r_1\} \setminus \{i_1\}},$$

Первое равенство выполняется в силу антикоммутативности внешнего произведения.
Аналогично, если из каждой строки y_k вычесть строку $root(y_k)$, то определитель получившейся матрицы будет равен

$$\det Z^{M\setminus R}_{M\setminus R} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \sum_{i_2=r_1+1}^{r_2} \cdots \sum_{i_{p-1}=r_{p-2}+1}^{r_{p-1}} \prod_{t=1}^{p-1} (-1)^{r_t-i_t} \det Y^{M\setminus R}_{M\setminus\{i_1,i_2,i_3,\ldots i_{p-1}\}}.$$

$$\sum_{i_1=1}^{r_1}\sum_{i_2=r_1+1}^{r_2}\cdots\sum_{i_{p-1}=r_{p-2}+1}^{r_{p-1}}\prod_{t=1}^{p-1}(-1)^{r_t-i_t}\det Y^{M\setminus R}_{M\setminus\{i_1,i_2,i_3,\dots i_{p-1}\}}$$

$$\overset{(3)}{=}\sum_{I\text{ — валидный набор}}(-1)^{\sum\limits_{t=1}^{p-1} r_t+\sum\limits_{i\in I} i}\det Y^{M\setminus R}_{M\setminus I}$$

$$\overset{(4)}{=}\sum_{I,J\text{ — валидные наборы}}(-1)^{\sum\limits_{i\in I} i+\sum\limits_{j\in J} j}\det X^{M\setminus J}_{M\setminus I}$$

$$\overset{(5)}{=}\sum_{I,J\text{ — валидные наборы}}\frac{\det(X^{-1})^J_I}{\det X^{-1}}\overset{(6)}{=}\frac{\sum\limits_{I,J\text{ — валидные наборы}} C^J_I}{\widetilde{\det} C}.$$

(3) Сделаем замену $I=\{i_1,i_2,\dots i_{p-1}\}$.

(4) Это равенство получаем аналогично равенствам (2)-(3).

(5) По известной формуле для дополнительных миноров двух взаимно-обратных матриц.

(6) По шагу 1 алгоритма.

Через $w(x_{11}, \ldots, x_{1n_1} | x_{21}, \ldots, x_{2n_2} | \ldots | x_{k1}, \ldots, x_{kn_k})$, где x_{ij} – граничные вершины, обозначим сумму весов всех остовных лесов с k компонентами связности, где $x_{i1}, \ldots, x_{in_i}$ лежат в одной компоненте связности (все граничные вершины, не входящие в множество $\{x\}_{ij}$, могут лежать в любой компоненте связности).

Теорема (Теорема Кеньена–Вильсона о минорах матрицы ответа)

Пусть A, B, C, D *– попарно непересекающиеся множества, такие что* $|A| = |B|$ *и* $A \cup B \cup C \cup D$ *- множество всех граничных вершин. Положим* $I = A \cup C = \{a_1, \dots, a_{|A|}, c_1, \dots, c_{|C|}\}$ *и* $J = B \cup C = \{b_1, \dots, b_{|B|}, c_1, \dots, c_{|C|}\}$. *Тогда выполняется следующее равенство:*

$$\det C_{I,J} = \frac{(-1)^{|A|} \sum_{\pi} sign(\pi) \cdot w(a_1 b_{\pi(1)} | \dots | a_{|A|} b_{\pi(|A|)} | d_1 | \dots | d_{|D|})}{\sum w(H)}, \tag{1}$$

где сумма в знаменателе берётся по всем валидным для электрической цепи лесам H, *а сумма в числителе берется по всем перестановкам* $\pi \in S_{|A|}$, *где* $sign(\pi) = -1$ *для нечетной перестановки и* $sign(\pi) = 1$ *для четной (в том числе для пустой перестановки).*

Лемма (2)

Пусть остовный лес $G = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_c$ имеет компоненты связности $G_1, \ldots, G_c$. Тогда валидные миноры, в которые дает вклад лес G, находятся в биекции с разбиениями множества M на четыре подмножества A, B, C, D, удовлетворяющими следующим условиям:

1. *Для всех $k = 1, \ldots, p-1$ выполняется $|A \cap A_k| = |B \cap A_k| = 1 - |C \cap A_k| = 0$ или 1;*
2. $|A \cap A_p| = |B \cap A_p| = |C \cap A_p| = 0$;
3. *Для всех $k = 1, \ldots, c$ выполняется $|A \cap G_k| = |B \cap G_k| = 1 - |D \cap G_k| = 0$ или 1.*

Более того, знак леса G в миноре равен $\mathrm{sgn}(G) = (-1)^{|A|}\mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau)$, где биекции $\sigma\colon A \mapsto B$ и $\tau\colon B \mapsto A$ однозначно определяются следующими условиями:

(a) a и $\sigma(a)$ принадлежат одной и той же компоненте связности в G.

(b) b и $\tau(b)$ принадлежат одному и тому же суперпорту.

Если $|\mathrm{A}| = 0$, то положим знак пустой перестановки $\sigma \circ \tau$ равным $+1$.

Лемма (3)

Пусть лес G и разбиение $A \sqcup B \sqcup C \sqcup D$ множества M удовлетворяют условиям (1)–(3) из предыдущей леммы. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — последовательность ориентированных ребер, формирующих ориентированный цикл в $G/\sim$. Объединение $e_1 \cup \cdots \cup e_n$ разбивается на непересекающиеся ориентированные пути в G. Обозначим их через $u_0 \ldots v_0, \quad \ldots, \quad u_{m-1} \ldots v_{m-1}$ в порядке появления в цикле. Тогда, с точностью до изменения направления цикла, выполняется одно из двух условий:

(AB) $u_k \in A, v_k \in B$ *для всех* $k = 0, \ldots, m-1$;

(CD) $u_k \in C$, $v_k \in D$ *для всех* $k = 0, \ldots, m-1$.

Матричная теорема Кирхгофа о деревьях для суперпортовой цепи

Теорема

Пусть дана суперпортовая цепь с матрицей ответа L. Тогда:

$$\det L = \frac{\sum w(T)}{\sum w(F)},$$

где сумма в знаменателе по всем валидным лесам F, а в числителе по всем остовным деревьям T в графе суперпортовой цепи.