Тотальный граф кольца матриц

исходящие степени вершин подграфов

Данил Шешеня

НИУ ВШЭ

7 июня 2023 г.

Предмет исследования

Определение (Тотальный граф)

$\mathcal{T}_n(\mathbb{F}_q)$ – такой граф, что

- $V = M_n(\mathbb{F}_q)$ – квадратные $n \times n$ матрицы над *конечным* полем $\mathbb{F}_q$
- $E = \{(A, B) \mid \det(A + B) = 0\}$

Зафиксируем матрицу $A \in M_n$ ранга i, поле $\mathbb{F}_q$

Определение

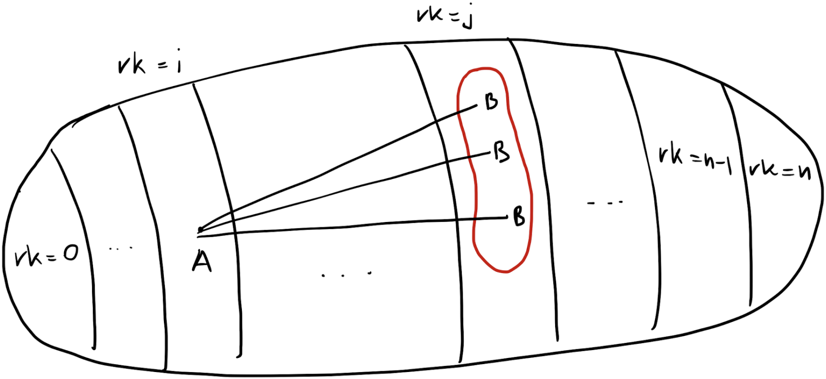
$d_{ij}(n) = |\{B \in M_n \mid \mathrm{rk}\, B = j, \det(A + B) = 0\}|$

Упражнение

$d_{ij}(n)$ не зависит от выбора матрицы A

Здесь и далее, все матрицы рассматриваются над конечным полем

Графовая интерпретация $d_{ij}(n)$



Цели и мотивация

- Изучить свойства чисел $d_{ij}(n)$
- Вывести явные формулы для некоторых значений параметров
- Написать программу для подсчета $d_{ij}(n)$

- Работа теоретическая
- Впервые числа возникли в контексте исследования автоморфизмов тотального графа
- Могут быть использованы для обобщения некоторых классических теорем
- В литературе задача не имеет должного исследования

Определение

$\mathcal{J}_k(n) = \{A \in M_n \mid \operatorname{rk} A = k\}$
$GL_n = \{A \in M_n \mid \det A \neq 0\}$

Утверждение

$|GL_n| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})$
$|J_k(n)| = \frac{(q^n-1)^2 \dots (q^n-q^{k-1})^2}{(q^k-1)\dots(q^k-q^{k-1})}$

Утверждение

$d_{ij}(n) \cdot |\mathcal{J}_i(n)| = d_{ji}(n) \cdot |\mathcal{J}_j(n)|$

Утверждение

$i + j < n \implies d_{ij}(n) = |\mathcal{J}_j(n)|$

Доказательство.

$\operatorname{rk}(A + B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B = i + j < n \implies \det(A + B) = 0$ $\square$

Основные результаты

Теорема

$d_{1n}(n) = q^{n-1}(q^n - q)(q^n - q^2)\dots(q^n - q^{n-1})$

Доказательство.

Пусть $A = E_{11}$

- $$\det(A+B) = \begin{vmatrix} b_{11}+1 & b_{12} & \dots \\ b_{21} & b_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots \\ b_{11} & b_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}}_{\overline{B}_{1,1}(\text{алг. доп. B})} + \det B$$

- $$B_{1,1}^{-1} = \frac{1}{\det B}\overline{B}_{1,1} \implies \det(A+B) = \det B \cdot (B_{1,1}^{-1} + 1)$$

$\square$

Основные результаты

Теорема

$$d_{2n}(n) = q^{n-1}(q^n + q^{n-1} - q^{n-2} - q - 1)(q^n - q^2)\dots(q^n - q^{n-1})$$

Доказательство.

- Можно свести подсчет матриц к подсчету числа матриц ранга 2 с собственным значением 1
- Матрицы ранга 2 имеют 4 вида фробениусовой нормальной формы
- Нужно найти размеры орбит действия $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$ группы $G = GL_n$
- $|Gx| = |G|/|St(x)|, \quad gxg^{-1} = x \iff gx = xg$

□

Основные результаты

Теорема

$$d_{n-k,k}(n) = \frac{(q^n-1)^2 \dots (q^n-q^{k-1})^2 - (q^n-q^{n-k})^2 \dots (q^n-q^{n-1})^2}{(q^k-1) \dots (q^k-q^{k-1})}$$

Доказательство.

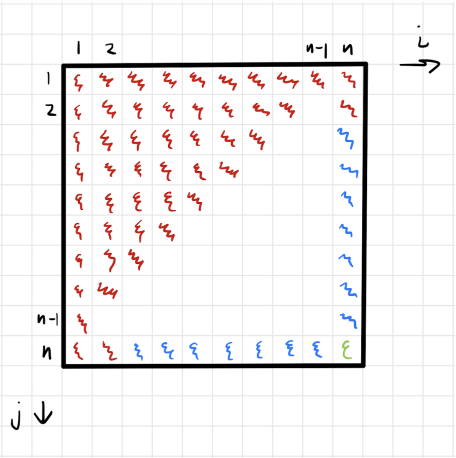
- $A = \mathrm{diag}(\overbrace{1, \dots, 1}^{n-k}, 0, \dots, 0) \implies \det(A+B) =$ нижнему правому $k \times k$ минору
- Считаем матрицы B в виде скелетного разложения
- Существует $|GL_r|$ скелетных разложений

$\square$

Программная часть

- Все формулы проверены полным перебором на небольших значениях параметров
- Написана программа, считающая $d_{in}(n)$ в виде многочлена от q
- `https://github.com/dsheshenya/hse-research`

Результаты



есть явная формула

есть рекуррентная формула

есть программа