

# Содержание

<b>1 Введение</b>	<b>1</b>
1.1 Основные термины и определения	1
1.2 Цель и задачи исследования	1
1.3 Сравнительный анализ источников	3
<b>2 Основная часть</b>	<b>4</b>

## 1 Введение

Данная работа посвящена шашкам Фейнмана — элементарной модели движения электрона, предложенной Р. Фейнманом. Шашки Фейнмана также известны как одномерное квантовое блуждание или модель Изинга при мнимой температуре. Мы приводим неизвестную ранее асимптотику максимума волновой функции, а также асимптотику положения этого максимума.

### 1.1 Основные термины и определения

Приведём определение базовой модели в шашках Фейнмана.

**Определение 1.** [3] и [8, определение 1] *Путь шашки* — это конечная последовательность целых точек на плоскости, такая что вектор из каждой точки к следующей равен либо  $(1, 1)$ , либо  $(-1, 1)$ . *Поворот* — это такая точка пути, что вектор, соединяющий эту точку с предыдущей, ортогонален вектору, соединяющему её со следующей. *Стрелка* — это комплексное число

$$a(x, t) := 2^{\frac{1-t}{2}} \cdot i \cdot \sum_s (-i)^{\text{turns}(s)},$$

где сумма берётся по всем путям  $s$  шашки из  $(0, 0)$  в  $(x, t)$ , которые проходят через  $(1, 1)$ , а  $\text{turns}(s)$  обозначает общее число поворотов в  $s$ . Пустую сумму будем предполагать равной нулю. Обозначим

$$P(x, t) := |a(x, t)|^2, \quad \tilde{A}_1(x, t) := \text{Re } a(x, t + 1), \quad \tilde{A}_2(x, t) := \text{Im } a(x + 1, t + 1).$$

Функция  $a(x, t)$  называется *волновой функцией электрона, испущенного из точки  $(0, 0)$* , а число  $P(x, t)$  — *вероятностью обнаружить электрон в точке  $(x, t)$* .

### 1.2 Цель и задачи исследования

Как видно на рис. 1, внутри интервала  $(-t, t)$  у волновой функции  $\tilde{A}_1(x, t)$  есть чётко выраженные максимумы. Численные эксперименты показывают, что максимум расположен вблизи прямой  $x = t/\sqrt{2}$ . Поэтому имеет смысл нарисовать график отклонения позиции максимума от этой прямой в зависимости от  $t$  (рис. 2). Кроме того, нарисуем график самого значения максимума (рис. 3).

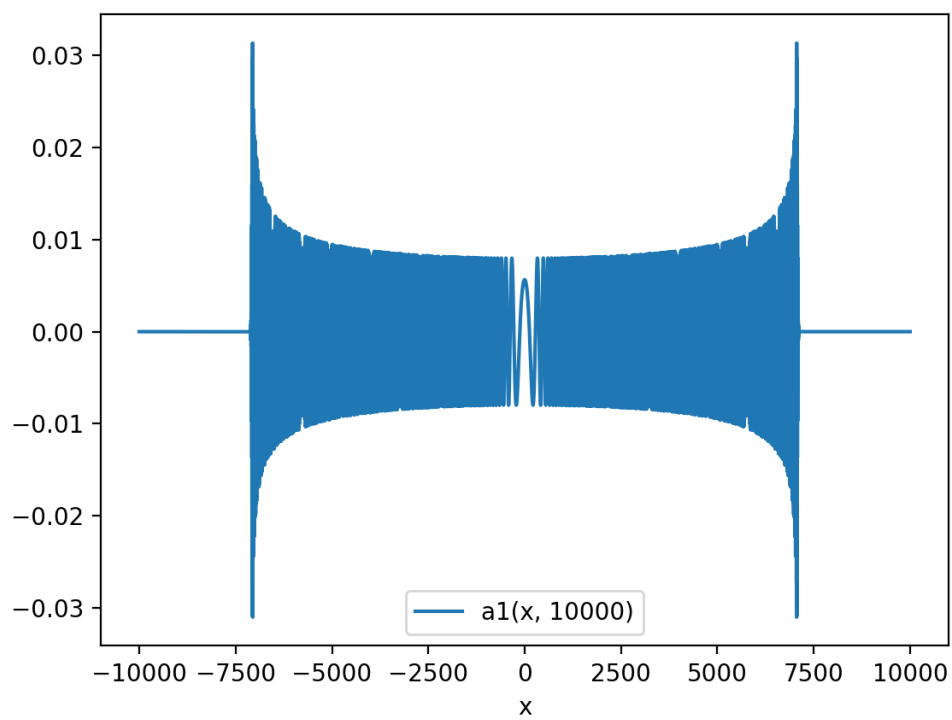


Рис. 1:  $\tilde{A}_1(x, 10000)$

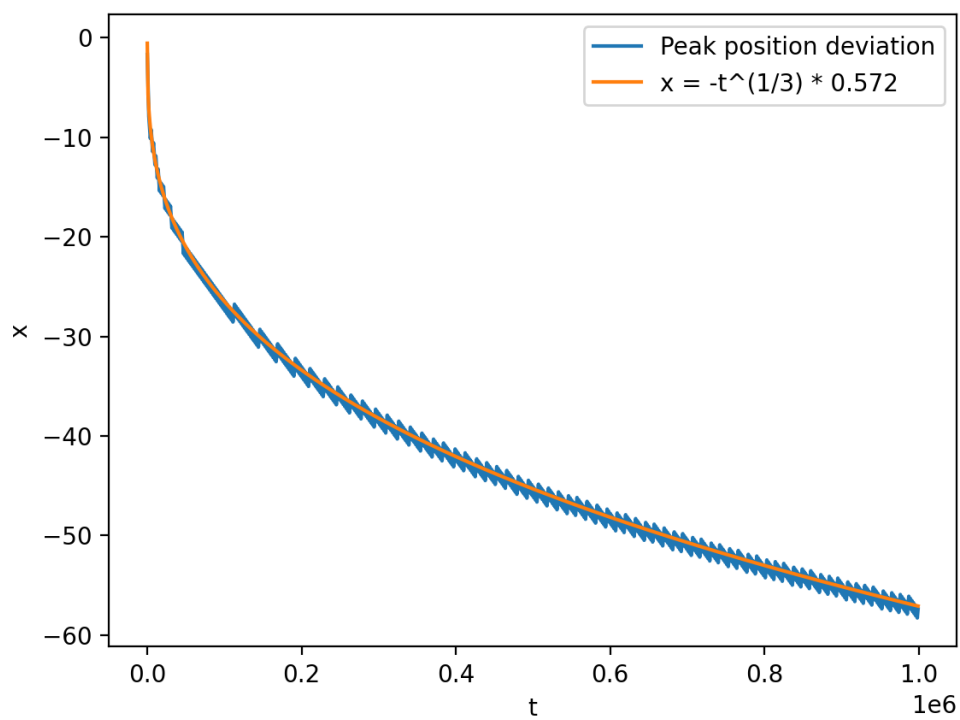


Рис. 2:  $\arg \max_x \tilde{A}_1(x, t) - t/\sqrt{2}$

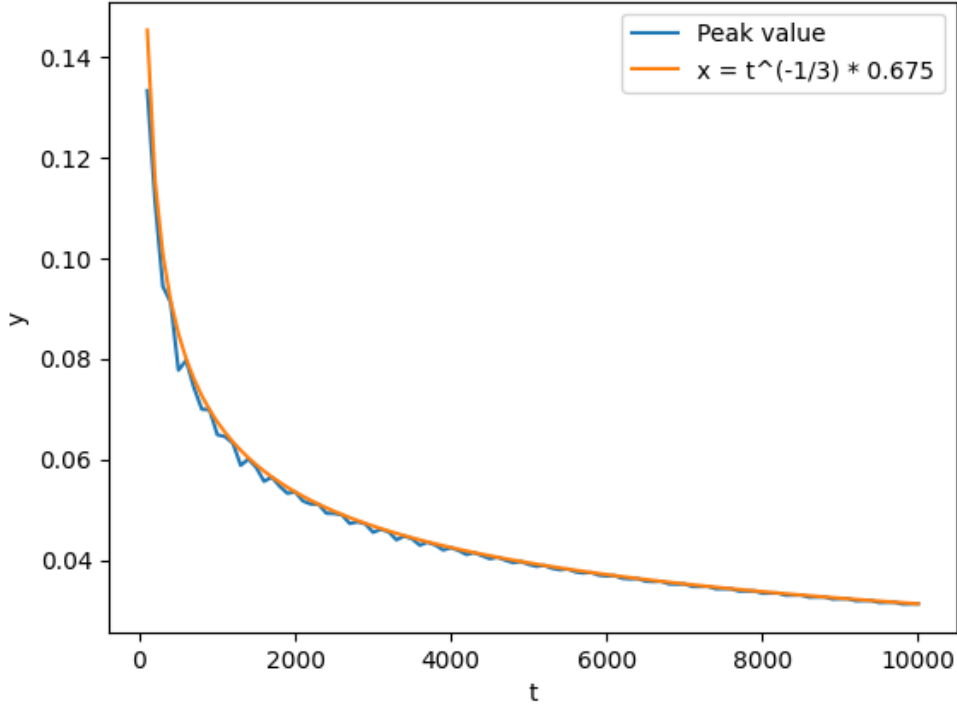


Рис. 3:  $\max_x \tilde{A}_1(x, t)$

Справедлива следующая теорема, описывающая значения и положения максимума.

**Теорема 1.** *Для любых целых  $t$  выполнено*

$$\begin{aligned} \max_{\substack{x \in [0; t] \\ x+t \text{ odd}}} |\tilde{A}_1(x, t)| &= \max_{x \in \mathbb{R}} \text{Ai}(x) \cdot 2^{1/3} t^{-1/3} + O\left(\frac{1}{t}\right), \\ \arg \max_{\substack{x \in [0; t] \\ x+t \text{ odd}}} |\tilde{A}_1(x, t)| &= \frac{t}{\sqrt{2}} + \arg \max_{x \in \mathbb{R}} \text{Ai}(x) \cdot 2^{-5/6} t^{1/3} + O(1). \end{aligned}$$

### 1.3 Сравнительный анализ источников

Асимптотические свойства волновой функции при больших  $t$  изучались различными авторами. Главные члены в асимптотике во внутренней области были найдены в [1, теорема 2]. Остаточные члены были оценены в [9, предложение 2.2]. Другие методы, такие как асимптотика Дарбу для многочленов Лежандра и круговой метод Харди-Литтлвуда, были применены в [2, теорема 3] и [8, теорема 2] для более грубой асимптотики при  $x$  вблизи 0. Наконец, равномерная по  $x$  асимптотика  $\tilde{A}_1(x, t)$  во внутренней области была найдена в [10, теорема 1] (см. предложение 1).

В данной работе приводится неизвестная ранее асимптотика максимума волновой функции, а также асимптотика положения этого максимума. Дисперсионные оценки такого рода являются активной темой исследований [5, 6, 7]. Наш результат усиливает известную ранее грубую оценку на значение максимума [5, теорема 2.1] и на его положение [1], а также решает открытую проблему [8, Problem 1]. Доказательство основано на результатах, полученных в 2022 году в [4] и [10].

**Предложение 1.** [10, теорема 1] *Для любых целых  $x, t$ , таких что  $|x| < t/\sqrt{2}$  и  $x + t$  нечётно, выполнено*

$$\tilde{A}_1(x, t) = (-1)^{(|x|-t+1)/2} \left( \frac{4\theta(x/t)}{1-2(x/t)^2} \right)^{1/4} \left( \frac{1}{t} \right)^{1/3} \text{Ai} \left( -\theta(x/t) t^{2/3} \right) + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

где

$$\theta(v) := \left( \frac{3}{2} \left( -v \arctan \left( \frac{\sqrt{1-2v^2}}{v} \right) + \arctan \sqrt{1-2v^2} \right) \right)^{2/3}.$$

**Предложение 2.** [4, теорема 3] Для любых целых  $x, t$ , таких что  $t > 0$ ,  $x + t$  чётно и  $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{x}{t} \leq 1$ , выполнено

$$|\tilde{A}_1(x-1, t)| > |\tilde{A}_1(x+1, t)|.$$

## 2 Основная часть

Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие леммы.

**Лемма 1.** Функция  $\theta(v)$  из предложения 1 имеет следующие свойства:

1.  $\theta(v)$  убывает на  $[0; 1/\sqrt{2}]$  и  $\theta(1/\sqrt{2}) = 0$ ;
2.  $\theta'(v)$  отрицательна, ограничена и  $\theta'(1/\sqrt{2}) = -2^{5/6}$ .

Доказательство свойства 1.  $\theta(1/\sqrt{2}) = 0$  верно по определению. Обозначим

$$L(v) := -v \arctan \left( \frac{\sqrt{1-2v^2}}{v} \right) + \arctan \sqrt{1-2v^2}.$$

При  $v \in [0; 1/\sqrt{2})$  имеем

$$L'(v) = -\arctan \left( \frac{\sqrt{1-2v^2}}{v} \right) < 0,$$

следовательно, функции  $L(v)$  и  $\theta(v) = \left( \frac{3}{2} L(v) \right)^{2/3}$  убывают.  $\square$

Доказательство свойства 2. По теореме Лагранжа значение  $\theta'(1/\sqrt{2})$  равно пределу  $\theta'(v)$  при  $v \rightarrow 1/\sqrt{2}$ . Подставляя  $u = \sqrt{1-2v^2} \rightarrow 0$ , имеем

$$\begin{aligned} L'(v) &= -\arctan \left( \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{1-u^2}} \right) = -\arctan \left( \sqrt{2}u \left( 1 + \frac{u^2}{2} + O(u^4) \right) \right) = -\sqrt{2}u + \frac{u^3}{3\sqrt{2}} + O(u^5), \\ L(v) &= \sqrt{\frac{1-u^2}{2}} L'(v) + \arctan u = \left( 1 - \frac{u^2}{2} + O(u^4) \right) \left( -u + \frac{u^3}{6} + O(u^5) \right) + u - \frac{u^3}{3} + O(u^5) = \\ &= \frac{u^3}{3} + O(u^5), \\ \theta'(v) &= \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{L'(v)}{\sqrt[3]{L(v)}} = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/3} \frac{-\sqrt{2}u + O(u^3)}{\sqrt[3]{u^3/3 + O(u^5)}} = \left( \frac{2}{3} \right)^{1/3} \frac{-\sqrt{2} + o(1)}{1/\sqrt[3]{3} + o(1)} = -2^{5/6} + o(1). \end{aligned}$$

Заметим, что функция  $\theta'(v)$  нигде не равна нулю, поскольку  $L'(v) \neq 0$  при  $v \in [0; 1/\sqrt{2})$  и  $\theta'(v) = -2^{5/6}$  при  $v = 1/\sqrt{2}$ . Поскольку  $\theta'(v)$  непрерывна на  $[0; 1/\sqrt{2}]$  и отрицательна при  $v = 1/\sqrt{2}$ , она отрицательна и ограничена на всём отрезке.  $\square$

Следующая лемма позволяет оценить скорость сходимости максимума и является ключевой в нашем доказательстве.

**Лемма 2.** Пусть функция  $F(x)$  непрерывна на отрезке  $[l; r]$  и имеет единственный глобальный максимум в точке  $x_0$ , причём  $F''(x_0) < 0$ . Пусть  $S_t \subset [l; r]$  - последовательность конечных подмножеств, таких что расстояние между соседними элементами в  $S_t \cup \{l, r\}$  ограничено сверху функцией  $d(t)$ . Рассмотрим последовательность функций  $F_t(x)$  на  $S_t$ , таких что  $|F_t(x) - F(x)|$  ограничено сверху функцией  $g(t)$ . Тогда

$$\max_{x \in S_t} F_t(x) = F(x_0) + O_F(g(t) + d(t)^2), \quad (1)$$

$$\arg \max_{x \in S_t} F_t(x) = x_0 + O_F(\sqrt{g(t)} + d(t)). \quad (2)$$

Напомним, что запись  $f(t) = O_F(g(t))$  означает существование константы  $C(F)$  (зависящей от  $F$ , но не от  $t$ ), такой что для любых  $t$  выполнено  $|f(t)| \leq C(F)|g(t)|$ .

*Доказательство.* Обозначим

$$\begin{aligned} x_t &:= \arg \max_{x \in S_t} F_t(x), \\ x'_t &:= \arg \min_{x \in S_t} |x - x_0|, \\ G(x) &:= \begin{cases} \frac{F(x_0) - F(x)}{(x - x_0)^2}, & \text{if } x \neq x_0, \\ -F''(x_0)/2, & \text{if } x = x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку  $x_0$  - локальный экстремум  $F$ , разложение в ряд Тейлора функции  $F(x)$  в точке  $x = x_0$  имеет следующий вид:

$$F(x) = F(x_0) + \frac{F''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2).$$

Поскольку  $F(x)$  непрерывна,  $G(x)$  также непрерывна на  $[l; r]$ . Кроме того,  $G(x) > 0$ , поскольку  $F''(x_0) < 0$  и  $F(x_0) > F(x)$  для любых  $x \neq x_0$ . Следовательно, существуют положительные константы  $L_F, R_F$ , такие что для любых  $x \in [l; r]$  выполнено

$$L_F < G(x) < R_F. \quad (3)$$

Подставляя  $x = x'_t$  и используя вторую часть неравенства (3), имеем

$$F(x'_t) = F(x_0) - G(x'_t)(x'_t - x_0)^2 > F(x_0) - R_F \cdot d(t)^2.$$

Так как  $x_t = \arg \max_{x \in S_t} F_t(x)$  и  $|F_t(x) - F(x)| < g(t)$ , по неравенству треугольника

$$F(x_t) \geq F_t(x_t) - g(t) \geq F_t(x'_t) - g(t) \geq F(x'_t) - 2g(t).$$

Комбинируя предыдущие два неравенства, получаем

$$F(x_0) \geq F(x_t) > F(x_0) - R_F \cdot d(t)^2 - 2g(t).$$

Это доказывает оценку (1). Для доказательства оценки (2) подставим  $x = x_t$  в первую часть неравенства (3) и воспользуемся оценкой (1):

$$(x_t - x_0)^2 = \frac{F(x_0) - F(x_t)}{G(x_t)} \leq \frac{F(x_0) - F(x_t)}{L_F} = O_F(d(t)^2 + g(t)).$$

Таким образом,

$$|x_t - x_0| = O_F(\sqrt{d(t)^2 + g(t)}) = O_F(d(t) + \sqrt{g(t)}).$$

□

**Лемма 3.** Для любых  $\delta > 0$  и целых  $x, t$ , таких что  $x + t$  нечётно и  $t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3} < x < t/\sqrt{2}$ , выполнено

$$\tilde{A}_1(x, t) = (-1)^{(|x|-t+1)/2} 2^{1/3} t^{-1/3} \text{Ai}(-\theta(x/t)t^{2/3}) + O_\delta\left(\frac{1}{t}\right).$$

*Доказательство.* Искомая оценка следует из предложения 1 и следующего разложения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4\theta(v)}{1-2v^2}\right)^{1/4} &= \left(4 \cdot \frac{\theta(1/\sqrt{2}) + \theta'(1/\sqrt{2})(v - 1/\sqrt{2}) + O((v - 1/\sqrt{2})^2)}{v - 1/\sqrt{2}} \cdot \frac{v - 1/\sqrt{2}}{1 - 2v^2}\right)^{1/4} = \\ &= \left(4 \cdot \left(-2^{5/6} + O(v - 1/\sqrt{2})\right) \cdot \left(-2^{-3/2} + O(v - 1/\sqrt{2})\right)\right)^{1/4} = 2^{1/3} + O(v - 1/\sqrt{2}) = \\ &= 2^{1/3} + O_\delta(t^{-2/3}). \end{aligned}$$

□

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f(v) &:= \left(\frac{4\theta(v)}{1-2v^2}\right)^{1/4}, \\ u_t(v) &:= -\theta(v)t^{2/3}. \end{aligned}$$

При фиксированном  $t$  рассмотрим замену

$$u = u_t(v). \quad (4)$$

Заметим, что по лемме 1 эта функция имеет положительную производную, что также верно для обратной замены:

$$v = v_t(u) = \theta^{-1}(-ut^{-2/3}). \quad (5)$$

**Лемма 4.** Существует  $\delta > 0$ , удовлетворяющее следующему условию: для любых целых  $x, t$ , таких что  $x + t$  нечётно и  $0 \leq x \leq t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}$ , выполнено

$$|\tilde{A}_1(x, t)| \leq t^{-1/3} \text{Ai}(0) + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

*Доказательство.* Сделав замену (4), из предложения 1 получаем

$$|\tilde{A}_1(x, t)| = t^{-1/3} f(v_t(u)) |\text{Ai}(u)| + O\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{при } u = u_t(x/t). \quad (6)$$

По лемме 1 функция  $f(v)$  непрерывна на  $[0; 1/\sqrt{2})$  и имеет конечный предел в точке  $v = 1/\sqrt{2}$ . Следовательно,  $|f(v)| < M$  при некотором фиксированном  $M$ . Поскольку  $\text{Ai}(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow -\infty$  и  $\text{Ai}(0) > 0$ , существует  $u_0 < 0$ , такое что

$$|\text{Ai}(u)| < \text{Ai}(0)/M \quad \text{для любого } u \leq u_0. \quad (7)$$

Выберем  $\delta > 0$ , не зависящее от  $t$ , чтобы для любого  $w > 0$  из области определения  $\theta^{-1}(w)$  выполнялось  $(\theta^{-1}(w) - \theta^{-1}(0))/w \geq \delta/u_0$ . Тогда из формулы (5) следует

$$v_t(u_0) = \theta^{-1}(-u_0 t^{-2/3}) \geq \theta^{-1}(0) - \delta t^{-2/3} = 1/\sqrt{2} - \delta t^{-2/3} \geq x/t$$

для любого  $x \in [0; t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}]$ . Применим  $u_t$  к обеим частям и получим

$$u = u_t(x/t) \leq u_0 \quad \text{для любого } x \in [0; t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}].$$

Таким образом, из (6) и (7) следует

$$|\tilde{A}_1(x, t)| \leq t^{-1/3} \cdot M \cdot \frac{\text{Ai}(0)}{M} + O\left(\frac{1}{t}\right) = t^{-1/3} \text{Ai}(0) + O\left(\frac{1}{t}\right).$$

□

**Лемма 5.** Существует  $\delta > 0$ , такое что для любого  $t$  выполнено

$$\arg \max_{\substack{x \in [0; t] \\ x+t \text{ odd}}} |\tilde{A}_1(x, t)| \in [t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}; t/\sqrt{2}]. \quad (8)$$

*Доказательство.* Из предложения 2 следует, что точка максимума лежит на полуинтервале  $[0; t/\sqrt{2})$ . Применим лемму 4 и рассмотрим такое  $\delta > 0$ , что для любого  $x \in [0; t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}]$  нужной чётности выполнено

$$|\tilde{A}_1(x, t)| \leq t^{-1/3} \text{Ai}(0) + O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (9)$$

Без ограничения общности предположим  $\delta > 10$ . Рассмотрим последовательность

$$x_t := \max\{x \in \mathbb{Z} \mid x/t < 1/\sqrt{2}, x+t \text{ odd}\} \in (t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}; t/\sqrt{2}).$$

Тогда  $u_t(x_t/t) = O(t^{-1/3})$ , и по лемме 3 получаем следующую оценку:

$$|\tilde{A}_1(x_t, t)| = t^{-1/3}(\text{Ai}(0) + O(t^{-1/3})) + O_\delta\left(\frac{1}{t}\right) = 2^{1/3}t^{-1/3} \text{Ai}(0) + O_\delta\left(t^{-2/3}\right). \quad (10)$$

Сравнивая (9) и (10), получаем, что искомая точка максимума лежит на отрезке  $[t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}; t/\sqrt{2}]$  при достаточно больших  $t$ . Сдвинув  $\delta$ , добьёмся попадания в отрезок для любого  $t$ .  $\square$

*Доказательство теоремы 1.* Зафиксируем  $\delta$  из леммы 5 и обозначим

$$S_t := \{u_t(x/t) \mid x \in [t/\sqrt{2} - \delta t^{1/3}; t/\sqrt{2}], x+t \text{ odd}\}.$$

Рассуждая аналогично как в лемме 4, можно показать, что  $S_t \subset [u_0; 0]$  при некотором фиксированном  $u_0$ , не зависящем от  $t$ . Поскольку функция  $\theta(v)$  липшицева, расстояние между соседними элементами в  $S_t$  оценивается как  $O(t^{-1/3})$ . Для  $u \in S_t$  обозначим

$$F_t(u) := |\tilde{A}_1(tv_t(u), t)| \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^{1/3} = |\text{Ai}(u)| + O_\delta(t^{-2/3}),$$

последнее равенство следует из леммы 3. Применим лемму 2 к  $F_t(u)$ ,  $F(u) = |\text{Ai}(u)|$ ,  $d(t) = O(t^{-1/3})$ ,  $g(t) = O_\delta(t^{-2/3})$ . Тогда

$$\begin{aligned} \max_{u \in S_t} F_t(u) &= \text{Ai}(\alpha) + O_\delta(t^{-2/3}), \\ \arg \max_{u \in S_t} F_t(u) &= \alpha + O_\delta(t^{-1/3}), \end{aligned}$$

где  $\alpha := \arg \max_{x \in \mathbb{R}} \text{Ai}(x) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}} |\text{Ai}(x)|$ . Наконец, применяя лемму 1, получаем

$$\begin{aligned} \max_{\substack{x \in [0; t] \\ x+t \text{ odd}}} |\tilde{A}_1(x, t)| &= \max_{u \in S_t} |\tilde{A}_1(tv_t(u), t)| = \text{Ai}(\alpha) \cdot 2^{1/3}t^{-1/3} + O\left(\frac{1}{t}\right), \\ \arg \max_{\substack{x \in [0; t] \\ x+t \text{ odd}}} |\tilde{A}_1(x, t)| &= t \cdot v_t \left( \arg \max_{u \in S_t} |\tilde{A}_1(tv_t(u), t)| \right) = t \cdot \theta^{-1} \left( -\alpha t^{-2/3} + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) = \\ &= t \cdot \left( \theta^{-1}(0) + (\theta^{-1})'(0) \left( -\alpha t^{-2/3} + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) + O(t^{-4/3}) \right) = \frac{t}{\sqrt{2}} + \alpha \cdot 2^{-5/6} t^{1/3} + O(1). \end{aligned}$$

$\square$

## Список литературы

- [1] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous. One-dimensional quantum walks. In *Proceedings of the Thirty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '01, pages 37–49, New York, NY, USA, 2001. Association for Computing Machinery.
- [2] I. Bogdanov. Feynman checkers: the probability of direction reversal. 2022.
- [3] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum mechanics and path integrals*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [4] F. Kuyanov and A. Slizkov. Feynman checkers: number-theoretic properties. *submitted*, 2022.
- [5] M. Maeda, H. Sasaki, E. Segawa, A. Suzuki, and K. Suzuki. Scattering and inverse scattering for nonlinear quantum walks. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 38(7):3687–3703, 2018.
- [6] M. Maeda, H. Sasaki, E. Segawa, A. Suzuki, and K. Suzuki. Dispersive estimates for quantum walks on 1d lattice. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 74(1):217–246, 2022.
- [7] H. Mizutani. Dispersive estimates and asymptotic expansions for schrödinger equations in dimension one. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 63(1):239–261, 2011.
- [8] M. Skopenkov and A. Ustinov. Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory. *Russian Mathematical Surveys*, 3(465):73–160, 2022.
- [9] T. Sunada and T. Tate. Asymptotic behavior of quantum walks on the line. *J. Funct. Anal.*, 262(6):2608–2645, 2012.
- [10] P. Zakorko. Feynman checkers: a uniform approximation of the wave function by airy function. *preprint*.