НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Отражение в тонкой пленке

Ожегов Фёдор

HSE University

30 ноября 2023

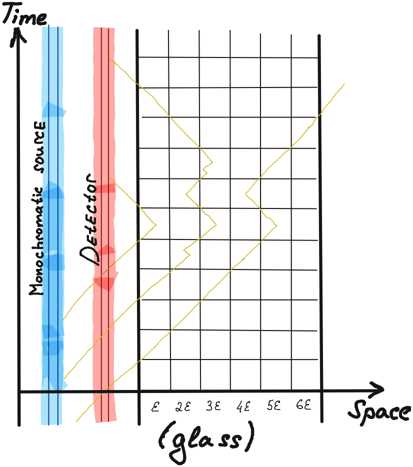
План

- Определение модели
- Формулировка основной теоремы
- Доказательство основной теоремы
- Доказательство сходимости и связь с шашками Фейнмана

Определение

Зафиксируем $\varepsilon, m, \omega, L > 0$ — ***шаг решетки***, ***силу рассеивания***, ***частоту*** *и* ***ширину полосы*** *соответственно. Положим* $m\varepsilon < 1$. *Рассмотрим решетку* $\varepsilon\mathbb{Z}^2 = \{\, (x, t) : x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z} \,\}$.***Световым путем*** *называется конечная последовательность точек решетки, такая, что вектор из каждой точки (кроме последней) к следующей сонаправлен* $(1, 1)$ *или* $(-1, 1)$ *и принадлежит полосе* $0 < x < L$. *Нулевой вектор считается сонаправленным любому вектору.*

Описание модели



Описание модели

Определение

Каждому световому пути s начинающемуся в $(0, T)$ и состоящему из $N+2$ точек мы сопоставим комлексное число

$$a(s, m, \varepsilon, \omega) := e^{i\omega T}(-im\varepsilon)^N.$$

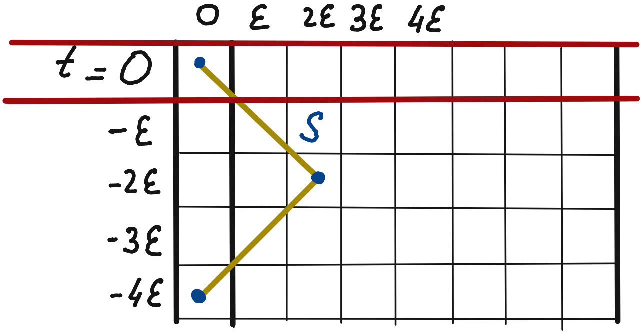
Определим ***стрелку отражения*** *(или* ***амплитуду отражения****) как бесконечную сумму*

$$a(\varepsilon, m, \omega, L) := \sum_{T \in \varepsilon\mathbb{Z}} \sum_{s:(0,T)\rightsquigarrow(0,0)} a(s, m, \varepsilon, \omega),$$

где внутренняя сумма берется по всем световым путям начинающимся в $(0, T)$ и оканчивающихся в $(0, 0)$. Определим ***вероятность отражения***

$$P(\varepsilon, m, \omega, L) := |a(\varepsilon, m, \omega, L)|^2.$$

Описание модели



Основная теорема.

Теорема (Отражение в тонкой пленке.)

Для любых $m, \omega, L > 0$ *имеем*

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\varepsilon, m, \omega, L) = \frac{(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^2 + 4n^2 \cot^2 \omega n L},$$

где $n := \sqrt{1 + 2m/\omega}$ *— показатель преломления.*

План доказательства.

- Определение волновой функции
- Доказательство реккурентного соотношения для волновой функции
- Составление системы и переход к пределу при стремлении шага решетки к 0

Обозначим

$$a_\pm(x,t) = a_\pm(x,t,m,\varepsilon,\omega,L) := \sum_{T\in\varepsilon\mathbb{Z}} \sum_{s:(0,T)\rightsquigarrow(x,t)} a(s,m,\varepsilon,\omega),$$

где внутренняя сумма берется по всем световым путям, начинающимся в $(0,T)$ и кончающимся в (x,t), таких что вектор из последней точки пути к предыдущей ненулевой и сонаправлен $(-1,-1)$ и $(1,-1)$ соответственно.

Пример

$$a_+(\varepsilon,0) = e^{-i\omega\varepsilon}, \qquad\qquad a_-(L-\varepsilon,0) = 0.$$

Пусть

$$m(x) := \begin{cases} m, & \text{if } 0 < x < L; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Лемма

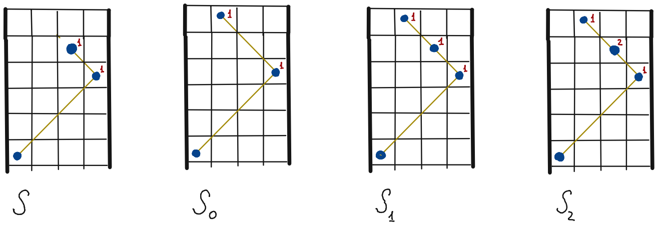
Для любых x, t, ε, L, выполнены следующие равенства:

$$a_-(x-\varepsilon, t+\varepsilon) = \frac{1}{1+im(x)\varepsilon} a_-(x,t) + \frac{-im(x)\varepsilon}{1+im(x)\varepsilon} a_+(x,t);$$

$$a_+(x+\varepsilon, t+\varepsilon) = \frac{-im(x)\varepsilon}{1+im(x)\varepsilon} a_-(x,t) + \frac{1}{1+im(x)\varepsilon} a_+(x,t).$$

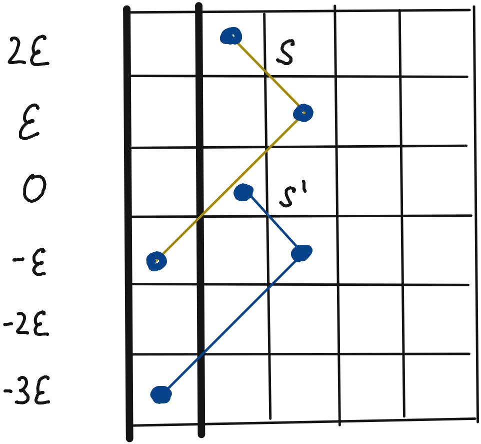
Доказательство основной теоремы
реккурентное соотношение

Докажем первое равенство, так как второе доказывается аналогично. Каждому световому пути s дающему вклад в правую сторону равенства сопоставим семейство световых путей s_j слева, и покажем что их вклады совпадают.
Заметим, что $a(s_j) = (-im\varepsilon)^j a(s)$.



Доказательство основной теоремы

Заметим, что $a_{\pm}(x,t) = e^{i\omega t} a_{\pm}(x,0)$.



Доказательство основной теоремы.

Тогда для $x = \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, L - \varepsilon$ имеем:

$$a_-(x-\varepsilon,0)e^{i\omega\varepsilon} = \frac{1}{1+im\varepsilon}a_-(x,0) + \frac{-im\varepsilon}{1+im\varepsilon}a_+(x,0); \tag{1}$$

$$a_+(x+\varepsilon,0)e^{i\omega\varepsilon} = \frac{-im\varepsilon}{1+im\varepsilon}a_-(x,0) + \frac{1}{1+im\varepsilon}a_+(x,0). \tag{2}$$

С граничными условиями

$$a_+(\varepsilon,0) = e^{-i\omega\varepsilon}, \qquad a_-(L-\varepsilon,0) = 0. \tag{3}$$

Хотим решить систему (1)–(3) в пределе при $\varepsilon \searrow 0$ и, следовательно, найти вероятность отражения $\lim\limits_{\varepsilon\searrow 0} |a_-(0,0)|^2$.

Доказательство основной теоремы

Покажем, что любое решение системы (1)–(2) имеет форму

$$a_+(x,0) = a(\varepsilon)e^{ik(\varepsilon)x} + b(\varepsilon)e^{-ik(\varepsilon)x}, \tag{4}$$

$$a_-(x,0) = c(\varepsilon)e^{ik(\varepsilon)x} + d(\varepsilon)e^{-ik(\varepsilon)x}, \tag{5}$$

для некоторых $a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon), d(\varepsilon) \in \mathbb{C}$ и $k(\varepsilon) > 0$, зависящих от ε. Действительно, имеем следующее реккурентное соотношение:

$$a_+(x-\varepsilon,0) - 2(\cos\omega\varepsilon - m\varepsilon\sin\omega\varepsilon)a_+(x,0) + a_+(x+\varepsilon,0) = 0. \tag{6}$$

Известно, что решение данного реккурентного соотношения имеет вид (4), где $e^{\pm ik(\varepsilon)\varepsilon}$ — корни *характеристического многочлена*

$$P(\chi) = \chi^2 - 2(\cos\omega\varepsilon - m\varepsilon\sin\omega\varepsilon)\chi + 1. \tag{7}$$

Теперь найдем пределы коэффициентов $a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon), d(\varepsilon), k(\varepsilon)$ и вероятности отражения $|a_-(0,0)|^2 = |c(\varepsilon)+d(\varepsilon)|^2$ при $\varepsilon \searrow 0$.
По теореме Виетта и (7) имеем:

$$\cos k(\varepsilon)\varepsilon = \cos\omega\varepsilon - m\varepsilon\sin\omega\varepsilon = 1 - \left(m\omega + \frac{\omega^2}{2}\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

Переходя к пределу, получаем

$$k := \lim_{\varepsilon\searrow 0} k(\varepsilon) = \omega\sqrt{1+\frac{2m}{\omega}} = \omega n.$$

Замечание

Это соотношение — хорошо известный в оптике результат: длина волны $\lambda := 2\pi/k$ в среде меньше чем длина волны $\lambda_{vac} := 2\pi/\omega$ в вакууме, кроме того $\lambda = \lambda_{vac}/n$.

Доказательство основной теоремы

Подставляя (2) and (5) в (1)–(2) and (3) и сравнивая коэффициенты при $e^{\pm ik(\varepsilon)x}$, получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} c(\varepsilon) &= a(\varepsilon)\cdot\frac{1-e^{i(k(\varepsilon)+\omega)\varepsilon}(1+im\varepsilon)}{im\varepsilon}, \quad & e^{i\omega\varepsilon} &= a(\varepsilon)e^{ik(\varepsilon)\varepsilon}+b(\varepsilon)e^{-ik(\varepsilon)\varepsilon}, \\ d(\varepsilon) &= b(\varepsilon)\cdot\frac{1-e^{i(\omega-k(\varepsilon))\varepsilon}(1+im\varepsilon)}{im\varepsilon}, \quad & 0 &= c(\varepsilon)e^{i(L-\varepsilon)k(\varepsilon)}+d(\varepsilon)e^{-i(L-\varepsilon)k(\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Переходя к пределу $\varepsilon \searrow 0$ получаем:

$$\begin{aligned} c &= a\cdot\frac{-m-\omega-k}{m}, \quad & 1 &= a+b, \\ d &= b\cdot\frac{-m-\omega+k}{m}, \quad & 0 &= ce^{iLk}+de^{-iLk}, \end{aligned} \tag{9}$$

Так как система (9) очевидно имеет единственное решение (a, b, c, d) и коэффициенты системы (8) непрерывно зависят от ε, получаем что предел решения $(a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon), d(\varepsilon))$ при $\varepsilon \searrow 0$ существует и равен (a, b, c, d).

Доказательство основной теоремы

Прямое вычисление показывает, что

$$c + d = -\frac{m}{m + \omega - ik \cot kL},$$

следовательно

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} P(\varepsilon, m, \omega, L) = |c + d|^2 =$$

$$= \frac{4m^2/\omega^2}{(2m/\omega + 2)^2 + 4(k^2/\omega^2) \cot^2 kL} = \frac{(n^2 - 1)^2}{(n^2 + 1)^2 + 4n^2 \cot^2 n\omega L}.$$

Определение

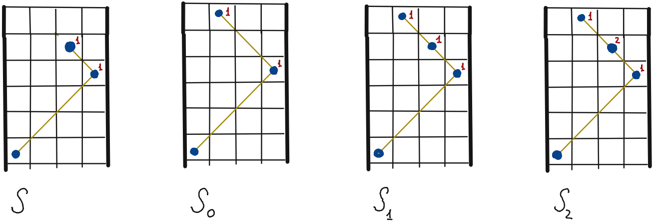
Каждому световому пути $s = (s_1, \dots, s_n)$ *сопоставим пару векторов* $p = (p_1, \dots, p_k)$ *и* $n = (n_1, \dots, n_k)$*, где* p_i *— точки решетки, через которые проходит* s*, а* n_i *— кратность точки* $p_i = (x_i, t_i)$ *в* s*.* ***Простой путь*** p ***из*** $(0, T)$ ***в*** (x, t) *это последовательность точек решетки, такая, что вектор из каждой точки(кроме последней) в следующую равен либо* $(\varepsilon, \varepsilon)$ *либо* $(-\varepsilon, \varepsilon)$*, где* $p_1 = (0, T)$ *и* $p_f = (x, t)$*.* ***Поворот*** *это такая точка простого пути (не первая и не последняя), что вектор из этой точки в предыдущую точку ортогонален вектору из этой точке в следующую. Обозначим через* $\mathrm{turns}(p, L)$ *количество поворотов в простом пути* p *внутри полосы* $0 < x < L$*.*

Обозначим

$$a_{\pm}(x, t, T) = a_{\pm}(x, t, m, \varepsilon, \omega, L, T) := \sum_{s:(0,T)\rightsquigarrow(x,t)} a(s, m, \varepsilon, \omega), \qquad (10)$$

где сумма берется по всем световым путям, начинающимся в $(0, T)$ *и кончающимся в* (x, t)*, таких что вектор из последней точки пути к предыдущей равен* $(-\varepsilon, -\varepsilon)$ *и* $(\varepsilon, -\varepsilon)$ *соответственно.*

Доказательство сходимости



Доказательство сходимости

Лемма

Величины $a_\pm(x,t,T)$ корректно определены (то есть соответствующие суммы абсолютно сходятся) и задаются формулами

$$a_\pm(x,t,T) = \sum_{p=(p_1,\dots,p_f)} (-im\varepsilon)^{\mathrm{turns}(p,L)} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-im(x_2)\varepsilon)^{n_2} \cdots \sum_{n_f=0}^{\infty} (-im(x_f)\varepsilon)^{n_f}, \tag{11}$$

где внешняя сумма берется по всем простым путям p из $(0,T)$ в (x,t) и вектор из p_{f-1} в p_f равен либо $(\varepsilon,\varepsilon)$ либо $(-\varepsilon,\varepsilon)$ для $a_+(x,t,T)$ и $a_-(x,t,T)$ соответственно, $f=(t-T+\varepsilon)/\varepsilon$.

Доказательство сходимости

Лемма

Для любых x, t, ε, L, T*, таких, что* $|m(x)\varepsilon| < 1$ *выполнены следующие равенства:*

$$a_-(x-\varepsilon, t+\varepsilon, T) = \frac{1}{1+im(x)\varepsilon} a_-(x,t,T) + \frac{-im(x)\varepsilon}{1+im(x)\varepsilon} a_+(x,t,T);$$

$$a_+(x+\varepsilon, t+\varepsilon) = \frac{-im(x)\varepsilon}{1+im(x)\varepsilon} a_-(x,t,T) + \frac{1}{1+im(x)\varepsilon} a_+(x,t,T).$$

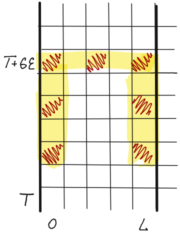
Доказательство сходимости

Определим $P_{\pm}(x,t,T) = P_{\pm}\left(x,t,T,m,\varepsilon,\omega,L\right) := \left|a_{\pm}(x,t,T)\right|^2$ and $P(x,t,T) = P_{+}(x,t,T) + P_{-}(x,t,T)$.

Лемма

Для любых $t_0 > T$ выполнено:

$$\sum_{T<t'\leq t_0} \left(P\left(0,t',T\right) + P\left(L,t',T\right)\right) + \sum_{0<x<L} P\left(x,t_0,T\right) = 1$$



Доказательство сходимости

Доказательство.

Доказательсто индукцией по $(t_0 - T)/\varepsilon$.
База. Так как $P_+(\varepsilon, T+\varepsilon, T) = 1$ единственное ненулевое слагаемое, то база очевидна.
Шаг. Выразим $P_+(x+\varepsilon, t+\varepsilon, T)$ и $P_-(x-\varepsilon, t+\varepsilon, T)$ через $a_\pm(x, t, T)$ для $x = \varepsilon, 2\varepsilon, \ldots, L-\varepsilon$.
Имеем:

$$P_+(x+\varepsilon, t+\varepsilon, T) = |a_+(x+\varepsilon, t+\varepsilon, T)|^2 = \left|\frac{-im\varepsilon}{1+im\varepsilon} a_-(x, t, T) + \frac{1}{1+im\varepsilon} a_+(x, t, T)\right|^2 =$$

$$= \frac{m^2\varepsilon^2 |a_-(x, t, T)|^2 + |a_+(x, t, T)|^2 + im\varepsilon\left(\bar{a}_-(x, t, T) a_+(x, t, T) - \bar{a}_+(x, t, T) a_-(x, t, T)\right)}{1+m^2\varepsilon^2};$$

$$P_-(x-\varepsilon, t+\varepsilon, T) = |a_-(x-\varepsilon, t+\varepsilon, T)|^2 = \left|\frac{-im\varepsilon}{1+im\varepsilon} a_+(x, t, T) + \frac{1}{1+im\varepsilon} a_-(x, t, T)\right|^2 =$$

$$= \frac{m^2\varepsilon^2 |a_+(x, t, T)|^2 + |a_-(x, t, T)|^2 + im\varepsilon\left(\bar{a}_+(x, t, T) a_-(x, t, T) - \bar{a}_-(x, t, T) a_+(x, t, T)\right)}{1+m^2\varepsilon^2}$$

Для $\varepsilon < x < L - \varepsilon$ имеем $P_+(x+\varepsilon, t+\varepsilon, T) + P_-(x-\varepsilon, t+\varepsilon, T) = P(x, t, T)$. □

Доказательство сходимости

Рассмотрим линейное отображение

$$u\colon\ (a_-(0,t,T), a_+(0,t,T), a_-(2\varepsilon,t,T), \dots, a_+(L,t,T)) \mapsto$$
$$\mapsto (a_-(0,t+2\varepsilon,T), a_+(0,t+2\varepsilon,T), a_-(2\varepsilon,t+2\varepsilon,T), \dots, a_+(L,t+2\varepsilon,T))$$

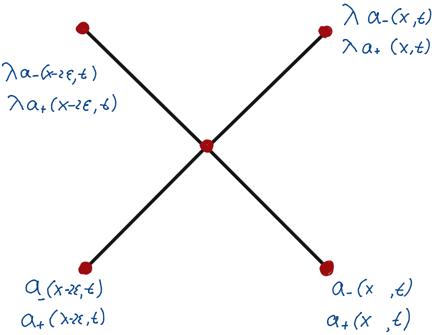
Лемма

Отображение u сжимающее.

Доказательство.
Отображение u — линейное из $R^{L/\varepsilon+2}$ в $R^{L/\varepsilon+2}$, тогда рассмотрим наибольшее по модулю собственное значение λ и соответсвующих собственный вектор $v^\lambda = (v_1^\lambda, \dots, v_{L/\varepsilon+2}^\lambda)$. Если $v_1^\lambda \neq 0$, тогда имеем:

$$\|v^\lambda\|^2 = |v_1^\lambda|^2 + |v_{L/\varepsilon+2}^\lambda|^2 + \|uv^\lambda\|^2 > \|uv^\lambda\|^2 = |\lambda|^2 \|v^\lambda\|^2.$$

Пусть $v_1^\lambda \neq 0$. Заметим, что $v_2^\lambda = 0$. Тогда рассмотрим самый левый ненулевой v_k^λ. Если $k \equiv_2 0$, то $(uv^\lambda)_{k-3} \neq 0$, что противоречит условию. Если $k \equiv_2 1$, то $(uv^\lambda)_k = 0$.



Лемма

Величины $a_{\pm}(x,t)$ определены корректно, то есть, твнутренние и внешние суммы абсолютно сходятся.

Доказательство.

Абсолютную сходимость внутренних сумм мы уже доказали ранее. Докажем сходимость внешней суммы. Пусть λ — наибольшее по модулю собственное значение u, а t/ε и T/ε четны, тогда имеем:

$$\sum_{T\in\varepsilon\mathbb{Z}} |a_{\pm}(x,t,T)| \leq \sum_{T\in\varepsilon\mathbb{Z}} |A(t,T)| \leq$$
$$\leq \sum_{\substack{T\in 2\varepsilon\mathbb{Z}\\ T\leq t}} |\lambda^{(t-T)/2\varepsilon} A(T,T)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} |\lambda^k| < \infty,$$

где $A(t,T) := (a_-(0,t,T), a_+(0,t,T), a_-(2\varepsilon,t,T), \ldots, a_+(L,t,T))$.

□

Спасибо за внимание!