

**Открытая весенняя студенческая олимпиада по математике**  
Факультета компьютерных наук ВШЭ  
28 мая 2023, 10:00 – 14:00

1. Исследуйте следующий ряд на сходимость:  $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 3^k}{3^k}$ . Если предел существует, то найдите его.
2. Рассмотрим непрерывную периодическую функцию  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  с периодом  $T$ . Докажите, что для любого вещественного  $\alpha$  выполняется следующее неравенство:

$$\int_0^T \frac{f(x)}{f(x + \alpha)} dx \geq T.$$

3. Два картографа: Валентин и Никита – исследуют транспортную систему будущего, основанную на *варп-прыжках* (далее – просто *прыжках*): изначально фиксируются три различные точки  $A, B$  и  $C$  не лежащие на одной прямой, в случае Никиты – на (евклидовой) плоскости, в случае Вали – в (евклидовом трёхмерном) пространстве. Далее две точки  $P$  и  $Q$  плоскости / пространства считаются *соединёнными*, если из  $P$  можно попасть в  $Q$  совершив прыжок с серединой в какой-то из точек  $A, B$  или  $C$  (то есть отразившись центрально симметрично в одной из них). У каждого из двух специалистов получается свой граф связей. Установите, будут ли эти графы изоморфны или нет.

*Комментарий:* тройка точек  $A, B$  и  $C$  у каждого из ребят своя. Ребята в выборе этих точек не участвуют.

4. Пусть в  $d$ -мерном пространстве  $\mathbb{R}^d$  задан выпуклый многогранник  $P$ , причём начало координат – точка  $O$ , лежит строго внутри  $P$ . Многогранником, *полярным* к  $P$ , называется многогранник  $P^\Delta$  определяемый как  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid px \leq 1 \forall p \in P\}$ , где  $px$  понимается как скалярное произведение радиус-векторов  $p$  и  $x$ .

Докажите, что для заданного выпуклого  $d$ -мерного многогранника  $Q$  в  $\mathbb{R}^d$  (то есть имеющего строго внутренние точки) внутри  $Q$  можно выбрать точку  $c$  так, что сумма радиус-векторов вершин многогранника  $(Q - c)^\Delta$  равна нулю.

5. Докажите, что для любых натуральных чисел  $n$  и  $p$ , где  $0 < n \leq p$ , все корни следующего многочлена вещественны:

$$P_{n,p}(x) = \sum_{j=0}^n \binom{p}{j} \binom{p}{n-j} x^j$$