

Открытая осенняя студенческая олимпиада ФКН по математике 2023
OSAM Comp 2023

16 сентября 2023, 14:00 – 17:00

I категория (I курс)

1. Пусть f – такая вещественнозначная функция от точек плоскости, что для каждого квадрата $ABCD$ на плоскости выполняется равенство $f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 0$. Следует ли из этого, что $f(P) = 0$ для всех точек P на плоскости?
2. Рассмотрим натуральное число n , которое не делится ни на 2, ни на 5. В десятичной записи числа $\frac{1}{n} = 0.a_1a_2a_3 \dots$ произвольное конечное количество цифр после десятичной точки удаляется. Очевидно, что полученное таким образом десятичное число также является рациональным, и его можно записать в виде $\frac{a}{b}$, где a и b – целые неотрицательные числа. Докажите, что b делится на n .
3. При натуральном $n > 2$ и вещественных x_i принадлежащих промежутку $[0, 1]$ найдите максимум выражения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n - x_nx_1.$$

4. Найдите сумму ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 - n + 1}$.
5. В лесу обитают M травоядных и N хищных животных. Каждый день два случайных представителя леса встречаются друг с другом. Когда встречаются два травоядных, они мирно расходятся; при встрече двух хищных животных оба убивают друг друга; при встрече хищника и травоядного погибает травоядное. Среди лесных животных есть одна редкая диковинная зверушка, каких в мире остался всего один экземпляр. Каковы шансы, что этому редкому животному удастся выжить, если научные мнения о травоядности этого вида разделились строго пополам?

Пояснение: Последнюю фразу следует понимать так, что это животное с вероятностью 50% является травоядным. Под “выживанием животного” подразумевается, что по окончании всех поеданий это животное останется живо.