

Открытая осенняя студенческая олимпиада ФКН по математике 2023
OSAM Comp 2023

16 сентября 2023, 14:00 – 17:00

II категория (II+ курс)

1. Все элементы матрицы размера 3×3 являются квадратами нечётных чисел. Докажите, что определитель этой матрицы делится на 64.
2. Последовательность точек на плоскости задана правилом: $(x_1, y_1) = (0, 0)$, а далее

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \left(\left(1 - \frac{2}{n}\right) x_n - \frac{1}{n} y_n + \frac{4}{n}, \left(1 - \frac{1}{n}\right) y_n - \frac{1}{n} x_n + \frac{3}{n} \right).$$

Докажите, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$ и найдите его.

3. Вычислите интеграл

$$\int_{1/2}^2 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + x + 1} dx$$

4. Дано некоторое ограниченное выпуклое тело $B \subset \mathbb{R}^n$ с непустой внутреннейстью. Некоторое линейное отображение $M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ таково, что $M(B) \subset B$. Докажите, что все собственные значения отображения M , включая комплексные, по модулю не превосходят 1.
5. В круг радиуса $r \leq 1$ случайным образом бросают материальную точку P . Далее она движется согласно уравнениям

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \sin(\pi/r) \\ \frac{d\varphi}{dt} = 1 \end{cases}$$

Какова вероятность, что эта точка при $t > 0$ пересечёт отрезок луча $\varphi = \pi/2$, $0.49 \leq r \leq 0.51$?