НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Интегрируемые квантовые блуждания.

Дмитриев Михаил Дмитриевич

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

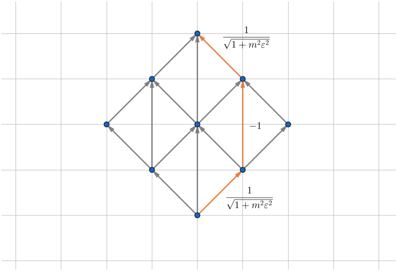
22 марта 2024 г.

Уравнение Клейна-Гордона

$$A(x, t+\varepsilon) + A(x, t-\varepsilon) - \frac{A(x+\varepsilon, t)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} - \frac{A(x-\varepsilon, t)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} = 0.$$

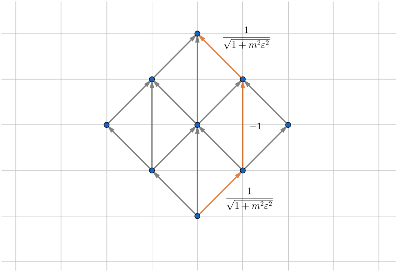
Частицы с нулевым спином

- Зафиксируем m и ε.
- Пусть шашка стоит на бесконечной клетчатой доске в клетке $(0, \varepsilon)$ и хочет добраться до $(x\varepsilon, t\varepsilon)$.
- Она может ходить вправо-вверх, влево-вверх или вверх на две клетки.



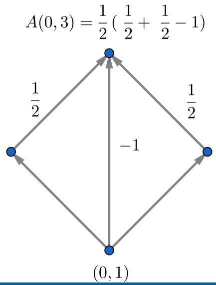
Частицы с нулевым спином

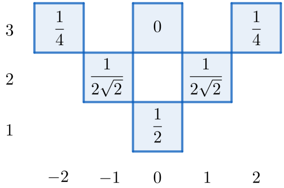
- Пути шашки мы будем сопостовлять число
- Изначально оно равно 1, при ходе вверх домножается на -1, а при ходах вправо-вверх или влево-вверх $\frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}$.
- $A(x,t)$ — это сумма таких чисел по всем путям из клетки $(0,\varepsilon)$ в $(x\varepsilon, t\varepsilon)$ деленная на 2.



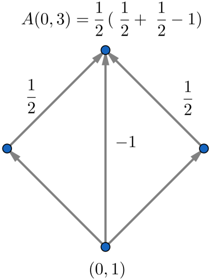
Частицы с нулевым спином

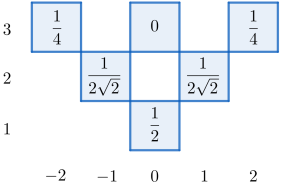
- *Путь шашки* — это конечная последовательность таких целых точек плоскости, что вектор из каждой точки (кроме последней) к следующей равен либо $(1,1)$, либо $(-1,1)$, либо $(0,2)$.
- *Вес пути* $s(\mathrm{weight}(s))$ — это число равное $\frac{(-1)^{\mathrm{up}}}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}^{\mathrm{left}+\mathrm{right}}}$, где up, left, right количество векторов $(0,2)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ в пути соответсвенно.





- $A(x,t)$ — это половина суммы весов путей по всем путям из $(0,\varepsilon)$ в клетку $(x\varepsilon, t\varepsilon)$.

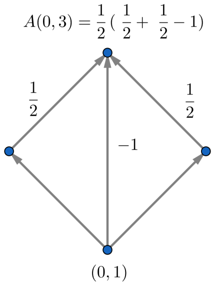


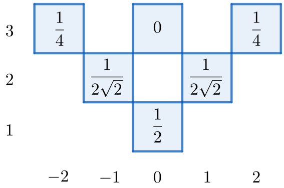


Частицы с нулевым спином

Постороенная модель удовлетворяет
Уравнение Клейна-Гордона

$$A(x,t+\varepsilon)+A(x,t-\varepsilon)-\frac{A(x+\varepsilon,t)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}-\frac{A(x-\varepsilon,t)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}=0.$$



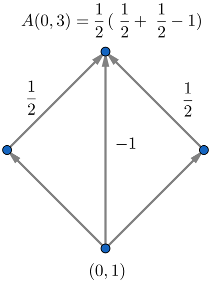


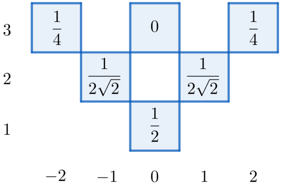
Частицы с нулевым спином

Главное свойство

$$A(x,t)=\frac{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}{2m\varepsilon}a_1(x,|t|+\varepsilon,m,\varepsilon).$$

Примечание $a_1(0,4,1,1)=0$





Частицы с нулевым спином

Проблема

У числа $A(x, t)$ нет физической интерпритации...

Античастицы

- $A(x,t) = A(x,t,m,\varepsilon,\delta)$ — это функция, определенная на множестве $\varepsilon\mathbb{Z}^2 := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z}\}$ и удовлетворяющая следующим двум аксиомам:

Аксиома

Для любых $(x,t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ выполнено равенство

$$-i\delta A(x,t)+A(x,t+\varepsilon)+A(x,t-\varepsilon)-\frac{A(x+\varepsilon,t)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}-\frac{A(x-\varepsilon,t)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} = \delta_{x0}\delta_{t0}. \tag{1}$$

Аксиома

$$\sum_{x,t\in\varepsilon\mathbb{Z}} |A(x,t)|^2 < \infty. \tag{2}$$

Античастицы

Пропагатор $A(x,t,m,\varepsilon)$ — это предел

$$A(x,t,m,\varepsilon) = \lim_{\delta \searrow 0} A(x,t,m,\varepsilon,\delta). \tag{3}$$

Античастицы

$G = \frac{\Gamma(1/4)^2}{(2\pi)^{3/2}}$ (константа Гаусса)

$L = \frac{1}{\pi G}$

1	$i\,\frac{G-L}{2}$	$\frac{1}{2}$	$i\,\frac{G-L}{2}$
0	0	$\frac{iG}{\sqrt{2}}$	0
-1	$i\,\frac{G-L}{2}$	$\frac{1}{2}$	$i\,\frac{G-L}{2}$
	-1	0	1

Античастицы

Теперь $A(x,t,m,\varepsilon)$ имеет смысл среднего значения заряда в интервале длины ε вокруг точки x в момент времени $t>0$, если частица массы m была испущена из начала координат в момент времени 0 (или античастица была поглощена там).

Интегральная формула

$$A(x,t,m,\varepsilon)=\lim_{\delta\searrow 0}\frac{\varepsilon^2}{4\pi^2}\int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon}\int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon}\frac{e^{ipx-i\omega t}d\omega dp}{2\cos(\omega\varepsilon)-2\cos(p\varepsilon)/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}-i\delta}.$$

Уже напоминает нам таковую для a_1.

$$A(x,t,m,\varepsilon)=\frac{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}{2m\varepsilon}a_1(x,|t|+\varepsilon,m,\varepsilon).$$

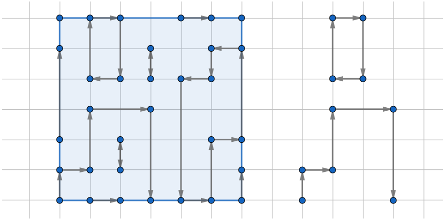
Античастицы

- *Решетка (размера T)* — это факторможество

$$\{(x,t)|x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant x, t \leqslant \varepsilon T\} \big/ \forall x,t : (x,0) \sim (x,\varepsilon T) \& (0,t) \sim (\varepsilon T,$$

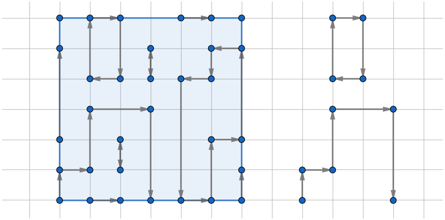
- Вершины решетки называются *соседними*, если у них совпадает одна координата, а другая отличается либо на ε, либо на $\varepsilon(T-1)$.
- Ребро — это отрезок, соединяющий соседние вершины. Ребро называется *вертикальным*, если оно параллельно Oy, и *горизонтальным*, если параллельно Ox.

- *Ориентированный путь на решетке* — это последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ различных вершин решетки такая, что для любого $i = 1, ..., n-1$ вершины a_i и a_{i+1} соседние.
Аналогично определяется цикл, с дополнением, что $a_1 = a_n$ и $n > 2$ (а остальные вершины различны).



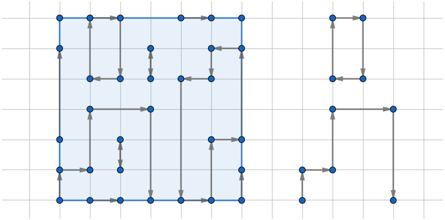
Античастицы

- *Перестановка начальной вершины цикла* — это удаление первой вершины из последовательности, затем циклическая перестановка вершин и добавление последней вершины получившейся последовательности в начало.
- *Замкнутый путь* — это цикл с точностью до перестановки начальной вершины цикла.



Античастицы

- *Конфигурация петель* λ — это объединение непересекающихся замкнутых путей на решетке.
- *Конфигурация петель* λ *с беспорядками в* P *и* Q — это объединение непересекающихся замкнутых путей на решетке и ровно одного (незамкнутого) пути из вершины P в вершину Q.

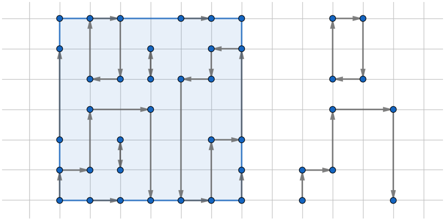


Античастицы

Для любой конфигурации λ мы определяем её *вес* по следующей формуле:

$$\mathrm{weight}(\lambda) = \frac{(-1)^{\#\mathrm{paths}(\lambda)}}{(1+m^2\varepsilon^2)^{\#\mathrm{horizontal}(\lambda)/2}(i\delta)^{\#\mathrm{vertices}(\lambda)}},$$

где $\#\mathrm{paths}(\lambda)$ — количество путей в конфигурации, $\#\mathrm{horizontal}(\lambda)$— количество их горизонтальных ребер, а $\#\mathrm{vertices}(\lambda)$ — количество их вершин.



Античастицы

$$x' := x \bmod \varepsilon T;$$

$$t' := t \bmod \varepsilon T.$$

- *Пропагатор на конечной решетке* — это функция

$$A(x,t,m,\varepsilon,T,\delta) = \frac{\sum_{\substack{\text{по конфигурациям } \lambda \\ \text{с беспорядками} \\ \text{в точках } (0{,}0) \text{ и } (x'{,}t')}} \mathrm{weight}(\lambda)}{\sum_{\substack{\text{по конфигурациям } \lambda \\ \text{без беспорядков}}} \mathrm{weight}(\lambda)}. \quad (4)$$

- *Пропагатор на бесконечной решетке* — это функция

$$A^{\mathrm{loop}}(x,t,m,\varepsilon) = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{T \nearrow \infty} A(x,t,m,\varepsilon,T,\delta). \quad (5)$$

Теорема

Функции $A(x,t,m,\varepsilon)$ *и* $A^{\mathrm{loop}}(x,t,m,\varepsilon)$ *определены корректно и более того, совпадают для всех* x,t,m,ε*:*

$$A^{\mathrm{loop}}(x,t,m,\varepsilon) = A(x,t,m,\varepsilon). \tag{6}$$

Доказательство теоремы

Предложение

Существует единственная функция $A(x,t)$, удовлетворяющая аксиомам 1-2:

$$A(x,t) = \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx - i\omega t} d\omega dp}{2\cos(\omega\varepsilon) - 2\cos(p\varepsilon)/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} - i\delta}.$$

Доказательство теоремы

Докажем предложение:

- Рассмотрим ряд

$$A(p,\omega) :\overset{L^2}{=} \sum_{(x,t)\in\varepsilon\mathbb{Z}^2} A(x,t)e^{-ipx+i\omega t}.$$

- Выведем уравнение на $A(p,\omega)$

$$\left(-i\delta + e^{i\omega\varepsilon} + e^{-i\omega\varepsilon} - \frac{e^{-ip\varepsilon}}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}} - \frac{e^{ip\varepsilon}}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}\right) A(p,\omega) = 1.$$

- Явное решение

$$A(p,\omega) = \frac{1}{2\cos(\omega\varepsilon) - 2\cos(p\varepsilon)/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} - i\delta}.$$

Доказательство теоремы

Предложение

Знаменатель в выражении (4) не обнуляется. Более того, верно, что для любых (x, t) из решетки размера T

$$A(x,t,m,\varepsilon,T,\delta) = \frac{1}{T^2} \sum_{p,\omega \in {(2\pi/T\varepsilon)\mathbb{Z}} \big/ {(2\pi/\varepsilon)\mathbb{Z}}} \frac{e^{ipx - i\omega t}}{2\cos(\omega\varepsilon) - 2\cos(p\varepsilon)/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} - i\delta}. \tag{7}$$

Его доказательство следует из двух следующих лемм.

Доказательство теоремы

Лемма

Существует единственная функция $A(x,t)$ на решетке размера T, удовлетворяющая аксиоме 1 из определения (где аргументы берутся по модулю εT). Она задается выражением (7).

Доказательство теоремы

Лемма

Пронумеруем вершины решетки произвольным образом. Рассмотрим матрицы A и U размера $T^2 \times T^2$ с индексами, пробегающими номера вершин решетки, заданные следующим образом:

$$A_{PQ} = A(x, t, m, \varepsilon, T, \delta), \text{ где } (x,t) = \overline{PQ};$$

$$U_{PQ} = \begin{cases} 1, & \text{если } PQ \text{ — вертикальное ребро;} \\ \frac{1}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}, & \text{если } PQ \text{ — горизонтальное ребро;} \\ -i\delta, & \text{если } P = Q; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Обозначим за Z знаменатель выражения (4). Тогда $Z = (-i\delta)^{-T^2} \det U$ и если $Z \neq 0$, то $A = U^{-1}$.

Доказательство теоремы

Идея доказательства леммы

- Рассмотрим уравнения Клейна-Гордона.
- Матрица U дает нам запись уравнения в виде системы.
- Нужно проверить выкладку:

$$\det U = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{P} U_{\sigma(P)P} = (-i\delta)^{T^2} \sum_{\lambda} \operatorname{weight}(\lambda) = (-i\delta)^{T^2} Z.$$

Здесь произведение берётся по всем вершинам P, первая сумма — по всем перестановкам вершин σ, а последняя сумма — по всем конфигурациям петель λ.

- Остается доказать $A = U^{-1}$.
- Зафиксируем вершины P и Q. Заменим U_{PQ} на 1, а остальные элементы в строке P на 0.
- Аналогично предыдущему рассуждению, определитель полученной матрицы равен числителю выражения (4).
- По правилу Крамера получаем $A = U^{-1}$.

Доказательство теоремы

Наконец докажем теорему:

$$A^{\text{loop}}(x,t,m,\varepsilon) = \lim_{\delta\searrow 0}\lim_{T\nearrow\infty} A(x,t,m,\varepsilon,T,\delta) =$$

$$= \lim_{\delta\searrow 0}\lim_{T\nearrow\infty} \frac{1}{T^2} \sum_{p,\omega\in (2\pi/T\varepsilon)\mathbb{Z} \diagup (2\pi/\varepsilon)\mathbb{Z}} \frac{e^{ipx-i\omega t}}{2\cos(\omega\varepsilon) - 2\cos(p\varepsilon)/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} - i\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\searrow 0} \frac{\varepsilon^2}{4\pi^2} \int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon}\int_{-\pi/\varepsilon}^{\pi/\varepsilon} \frac{e^{ipx-i\omega t}\,d\omega dp}{2\cos(\omega\varepsilon) - 2\cos(p\varepsilon)/\sqrt{1+m^2\varepsilon^2} - i\delta} = A(x,t,m,\varepsilon)$$

Немного про асимптотики

Теорема

Для любых $m, \varepsilon > 0$ *и* $(x,t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, *таких что* $m\varepsilon \leqslant 1$ *и* $|x| \neq |t|$, *верно*

$$A(x,t,m,\varepsilon) = \begin{cases} J_0(ms)/2 + O\left(\varepsilon\Delta\right), & \text{если } |x|<|t| \text{ и } (x+t)/\varepsilon \text{ нечетно;} \\ -iY_0(ms)/2 + O\left(\varepsilon\Delta\right), & \text{если } |x|<|t| \text{ и } (x+t)/\varepsilon \text{ четно;} \\ 0, & \text{если } |x|>|t| \text{ и } (x+t)/\varepsilon \text{ нечетно;} \\ iK_0(ms)/\pi + O\left(\varepsilon\Delta\right), & \text{если } |x|>|t| \text{ и } (x+t)/\varepsilon \text{ четно;} \end{cases}$$

где $s := \sqrt{|t^2 - x^2|}$, *а* $\Delta := \frac{1}{\left||x|-|t|\right|} + m^2(|x|+|t|)$.

Литература

- M. Abramowitz, I. A. Stegun,Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover, 1964.
- R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965
- I.S. Gradstein, I.M. Ryzhik, Tables of integrals, sums, series and products, 4th ed., Moscow, Fizmatgiz, 1963, 1100 pp. (in Russian).
- M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: Minkowskian lattice field theory, preprint, 2022, arxiv:2208.14247.
- M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73–160