НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Интегрируемые квантовые блуждания.

Дмитриев Михаил Дмитриевич

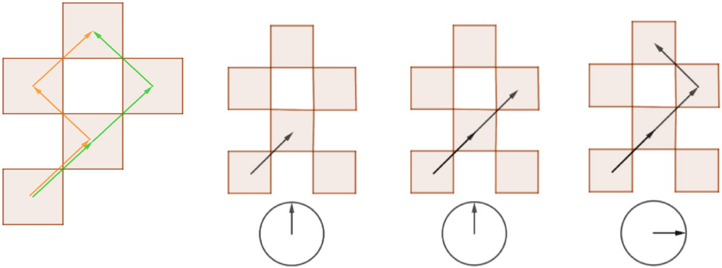
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

15 марта 2024 г.

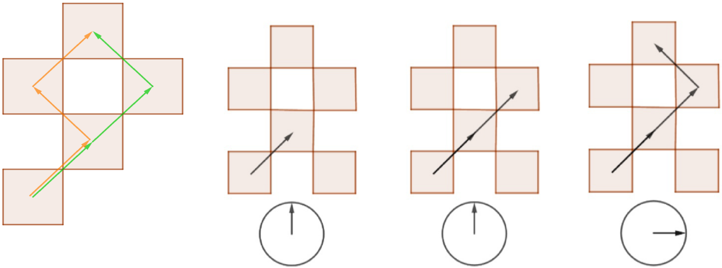
Напоминание

- Пусть шашка стоит на бесконечной клетчатой доске в клетке $(0,0)$ и хочет добраться до (x,t).
- Рассмотрим все пути, состоящие из ходов вправо-вверх и влево-вверх, с первым ходом вправо-вверх.



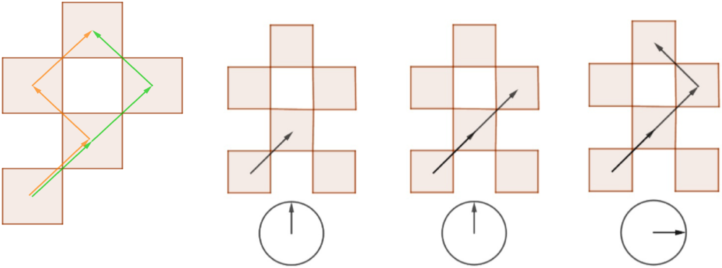
Напоминание

- Каждому пути сопоставим стрелку (вектор длины 1), вычисленную так: сначала она смотрит вверх, а при каждом повороте она поворачивается на $90°$.



Напоминание

- $a(x,t)$ - это сумма стрелок по всем путям с коэффициентом $2^{(1-t)/2}$.
- $|a(x,t)|^2$ - это вероятность обнаружить электрон, испущенный из $(0,0)$, в точке (x,t).
- Пример $a(1,3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$



Напоминание

- *Путь шашки* — это конечная последовательность таких целых точек плоскости, что вектор из каждой точки (кроме последней) к следующей равен либо $(1, 1)$, либо $(-1, 1)$.
- *Поворот* — это такая точка пути (не первая и не последняя), что вектор, соединяющий эту точку с предыдущей, ортогонален вектору, соединяющему её со следующей. $\mathrm{turns}(s)$ — общее число поворотов в s.
- *Стрелка* — это комплексное число

$$a(x,t) := 2^{(1-t)/2}\, i \sum_s (-i)^{\mathrm{turns}(s)},$$

где сумма берётся по всем путям s шашки из клетки $(0, 0)$ в клетку (x, t), *начинающимся с хода вправо-вверх.*

$$P(x,t) := |a(x,t)|^2.$$

Напоминание

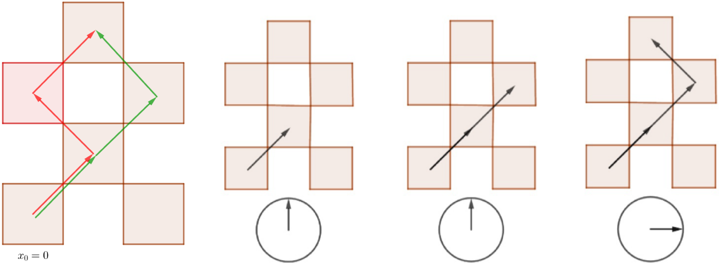
Дополним обозначения:

$$a_1(x,t) = \mathrm{Re}(a(x,t))$$

$$a_2(x,t) = \mathrm{Im}(a(x,t))$$

Модель с поглощением

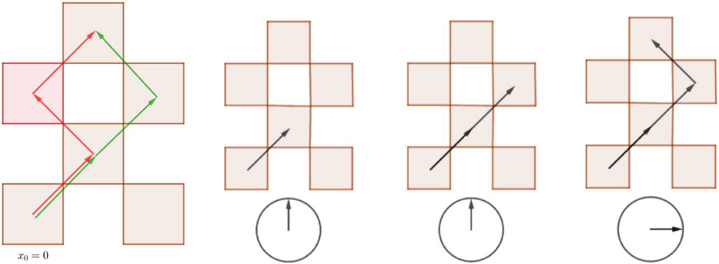
- Будем рассматривать все пути, состоящие из ходов вправо-вверх и влево-вверх, с первым ходом вправо-вверх и не проходящие через клетки вертикали $x = x_0$, кроме возможно первого и последнего хода.
- Аналогично определим $a_{1,2}(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0)$ и $P(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0)$



Модель с поглощением

Вернемся к примеру

- $a_1(x, t\,\text{bypass}\,0) = \frac{1}{2}$
- $a_2(x, t\,\text{bypass}\,0) = 0$



Первые значения функции $a(x, t \,\mathrm{bypass}\, 0)$

	$x=0$	1	2	3	4	5
5		0		$\frac{1-2i}{4}$		$\frac{i}{4}$
4	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$\frac{1-i}{2\sqrt{2}}$		$\frac{i}{2\sqrt{2}}$	
3		$\frac{1}{2}$		$\frac{i}{2}$		
2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{i}{\sqrt{2}}$			
1		i				
$t=0$						

Связь с обычной моделью

Теорема

Для любых $x, t \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $x \geqslant 0$, *а* $t > 0$ *и* $(x+t)$ *четно верно, что*

$$a_1(x+1, t+1 \,\text{bypass}\, 0) = a_2(-x-1, t+1) - a_2(-x+1, t+1) \quad (1)$$

$$a_2(x+1, t+1 \,\text{bypass}\, 0) = a_2(x+1, t+1) - a_2(-x+1, t+1) \quad (2)$$

Несколько следствий

Теорема (Амбаинис и др. 2001)

Для любого целого $t > 0$ выполнено

$$a(0, t\,\mathrm{bypass}\,0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & t = 2; \\ \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{(k+1)2^{2k+3/2}}, & t = 4k+4, \text{ где } k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Более того,

$$\sum_{t \in \mathbb{N}} P(0, t\,\mathrm{bypass}\,0) = \frac{2}{\pi}.$$

Несколько следствий

- Воспользуемся формулой для $x = 1, t = 4n + 4$

$$a_2(2, 4n+4\,\mathrm{bypass}\,0) = a_2(2, 4n+4) - a_2(0, 4n+4)$$

$$a_2(0, 4n+4) = (-1)^{n+1}(2)^{-4n-3/2}\binom{2n+1}{n}$$

$$a_2(2, 4n+4) = (2^{-4n-3/2})\sum(-1)^r\binom{2n+2}{r}\binom{2n}{r-1}$$

$$\sum_{r=1}(-1)^r\binom{2n+2}{r}\binom{2n}{r-1} = \frac{2n+2}{2n+1}\sum_{r=1}(-1)^r\binom{2n+1}{r}\binom{2n+1}{2n+2-r} =$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{2n+2}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$$

$$(2^{4n+3/2})a_2(2, 4n+4) = (-1)^{n+1}(\frac{2n+2}{2n+1}\binom{2n+1}{n} - \binom{2n+1}{n})$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = (-1)^{n+1}C_n = -(2^{4n+3/2})a_1(0, 4n+4)$$

- Для $t = 4n + 2$ аналогично.

Несколько следствий

Гипотеза

Для любых $x, t \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $x \geqslant 0$, *а* $t > 0$ *и* $(x+t)$ *четно верно, что*

$$a_2(x+1, t+1 \operatorname{bypass} 0) =$$

$$\sum_{r=0}^{(t-|x|)/2} (-1)^r 2r \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t+x}\right) \binom{(t-x)/2}{r} \binom{(t+x)/2}{r}$$

Предложение

Для любых целых $x > x_0 + 1$ *и* $t > 0$ *верно, что:*

$$\sqrt{2}a_1(x, t \operatorname{bypass} x_0) = a_2(x+1, t \operatorname{bypass} x_0) + a_1(x+1, t \operatorname{bypass} x_0)$$

$$\sqrt{2}a_2(x, t \operatorname{bypass} x_0) = a_2(x-1, t \operatorname{bypass} x_0) - a_1(x-1, t \operatorname{bypass} x_0)$$

Замечание: На самом деле уравнение Дирака верно для a_1 и при $x = x_0$ или $x_0 + 1$.

Другое определение модели

Начальное условие:

$$\widehat{a}_1(x, 1 \,\mathrm{bypass}\, 0) = 0$$

$$\widehat{a}_2(x, 1 \,\mathrm{bypass}\, 0) = \delta_{x1}$$

Граничное условие:

$$\widehat{a}_2(1, t \,\mathrm{bypass}\, 0) = 0$$

Уравнение Дирака:

$$\sqrt{2}\widehat{a}_1(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0) = \widehat{a}_2(x{+}1, t \,\mathrm{bypass}\, x_0){+}\widehat{a}_1(x{+}1, t \,\mathrm{bypass}\, x_0)$$

$$\sqrt{2}\widehat{a}_2(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0) = \widehat{a}_2(x{-}1, t \,\mathrm{bypass}\, x_0){-}\widehat{a}_1(x{-}1, t \,\mathrm{bypass}\, x_0)$$

Другое определение модели

Предложение

Для любых целых $x, t > 0$ *и* $i = 1, 2$ *верно, что:*

$$\widehat{a}_i(x, t \operatorname{bypass} 0) = a_i(x, t \operatorname{bypass} 0)$$

Доказательство:

- Докажем по индукции по t.
- База индукции $t = 1 \Leftarrow$ начального условия.

Другое определение модели

- Переход. Пусть

$$\widehat{a}_i(x, k \operatorname{bypass} 0) = a_i(x, k \operatorname{bypass} 0)$$

.

- Для $x > 1$ переход $\Leftrightarrow$ уравнение Дирака для $a_i(x, k+1 \operatorname{bypass} 0)$.
- Для $x = 1$ имеем $a_2(1, k+1 \operatorname{bypass} 0) = \widehat{a}_2(1, k+1 \operatorname{bypass} 0) = 0$ из граничного условия.
- Равенство $\widehat{a}_1(1, k+1 \operatorname{bypass} 0) = a_1(x, t \operatorname{bypass} 0)$ проверяем отдельно аналогично уравнению Дирака.

Замечание: При $x \leqslant 0$ модель с $\widehat{a}_{1,2}(x, t \operatorname{bypass} 0)$ дает совершенно другие числа не равные $a_{1,2}(x, t \operatorname{bypass} 0)$.

Связь с обычной моделью

Теперь мы готовы доказать нашу основную теорему

Теорема

Для любых $x, t \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $x, t > 0$ *и* $(x+t)$ *четно верно, что*

$$a_1(x+1, t+1 \operatorname{bypass} 0) = a_2(-x-1, t+1) - a_2(-x+1, t+1) \quad (3)$$

$$a_2(x+1, t+1 \operatorname{bypass} 0) = a_2(x+1, t+1) - a_2(-x+1, t+1) \quad (4)$$

Связь с обычной моделью

Доказательство

- Доказываем по индукции.
- База $t = 1$ явно вычисляется.
- Проверим граничное условие

$a_2(1, t+1 \operatorname{bypass} 0) = a_2(1, t+1) - a_2(1, t+1) = 0.$

Связь с обычной моделью

- Переход:

$$a_1(x+1, t+1 \,\text{bypass}\, 0) = \frac{a_1(x+2, t \,\text{bypass}\, 0) + a_2(x+2, t \,\text{bypass}\, 0)}{\sqrt{2}}$$

Связь с обычной моделью

- Переход:

$$a_1(x+1, t+1 \,\mathrm{bypass}\, 0) = \frac{a_1(x+2, t \,\mathrm{bypass}\, 0) + a_2(x+2, t \,\mathrm{bypass}\, 0)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{a_2(-x-2,t)+a_2(x+2,t)-2a_2(-x,t)-a_1(x+2,t)+a_1(-x-2,t)}{\sqrt{2}}$$

Связь с обычной моделью

- Переход:

$$a_1(x+1, t+1 \,\text{bypass}\, 0) = \frac{a_1(x+2, t \,\text{bypass}\, 0) + a_2(x+2, t \,\text{bypass}\, 0)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{a_2(-x-2,t)+a_2(x+2,t)-2a_2(-x,t)-a_1(x+2,t)+a_1(-x-2,t)}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{2a_2(-x,t)}{\sqrt{2}} + a_1(x+1,t+1) + a_2(-x-1,t+1)$$

Связь с обычной моделью

- Переход:

$$a_1(x+1, t+1 \,\text{bypass}\, 0) = \frac{a_1(x+2, t \,\text{bypass}\, 0) + a_2(x+2, t \,\text{bypass}\, 0)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{a_2(-x-2,t)+a_2(x+2,t)-2a_2(-x,t)-a_1(x+2,t)+a_1(-x-2,t)}{\sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{2a_2(-x,t)}{\sqrt{2}} + a_1(x+1,t+1) + a_2(-x-1,t+1) =$$

$$= \frac{a_1(-x,t) - a_2(-x,t)}{\sqrt{2}} + a_2(-x,t+1) =$$

$$= a_2(-x-1,t+1) - a_2(-x+1,t+1)$$

Предложение

Для любых $x, t \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $x, t > 0$ *и* $(x+t)$ *четно верно, что*

$$a_1(x, t\,\mathrm{bypass}\,0) = \frac{-i}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\frac{\sin(p)^2}{\sqrt{1+\sin(p)^2}} - \sin(p)\Big)e^{ipx - i\omega_p(t-1)}dp$$
$$+\delta_{x1}\delta_{t1}$$
$$a_2(x, t\,\mathrm{bypass}\,0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(p)}{\sqrt{1+\sin(p)^2}}e^{ip(x-1) - i\omega_p(t-1)}dp + \delta_{x1}\delta_{t1}$$

Интегральные формулы

Замечание

Интеграл для a_2 легко переписать следующим образом.

$$a_2(x, t\,\mathrm{bypass}\,0) = \frac{2i}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(p)}{\sqrt{1+\sin(p)^2}} \sin(p(x-1))e^{-i\omega_p(t-1)}dp + \delta_{x1}\delta_{t1}$$

Интегральные формулы

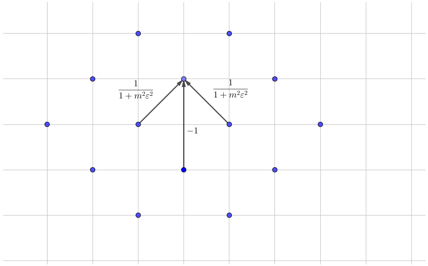
- Доказываем по индукции.
- База $t = 1$ легко проверить явным интегрированием.
- Проверяем граничное условие

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(p)}{\sqrt{1+\sin(p)^2}}e^{-i\omega_p(t-1)}dp = 0,$$

- Переход аналогично теореме

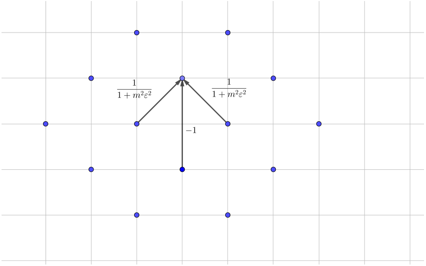
Античастицы

- Пусть шашка стоит на бесконечной клетчатой доске в клетке $(0,0)$ и хочет добраться до (x,t).
- Она может ходить врправо-вверх, влево-вверх или вверх на две клетки.



Античастицы

- Пути шашки мы будем сопостовлять число
- Изначально оно равно 1, при ходе вверх домножается на -1, а при ходах врправо-вверх или влево-вверх $\frac{1}{1+m^2\varepsilon^2}$.
- $\varphi(x,t)$ — это сумма таких чисел по всем путям из клетки $(0,0)$ в (x,t).



Античастицы

- $A(x,t) = A(x,t,m,\varepsilon,\delta)$ — это функция, определенная на множестве $\varepsilon\mathbb{Z}^2 := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z}\}$ и удовлетворяющая следующим двум аксиомам:

Аксиома

Для любых $(x,t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$ выполнено равенство

$$-i\delta A(x,t)+A(x,t+\varepsilon)+A(x,t-\varepsilon)-\frac{A(x+\varepsilon,t)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}-\frac{A(x-\varepsilon,t)}{\sqrt{1+m^2\varepsilon^2}}=\delta_{x0}\delta_{t0}. \tag{5}$$

Аксиома

$$\sum_{x,t\in\varepsilon\mathbb{Z}} |A(x,t)|^2 < \infty. \tag{6}$$

Античастицы

• *Решетка (размера T)* — это факторможество

$$\{(x,t)|x/\varepsilon, t/\varepsilon \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant x,t \leqslant \varepsilon T\} \big/ \forall x,t : (x,0) \sim (x,\varepsilon T) \& (0,t) \sim (\varepsilon T,$$

• Вершины решетки называются *соседними*, если у них совпадает одна координата, а другая отличается либо на ε, либо на $\varepsilon(T-1)$.

• Ребро — это отрезок, соединяющий соседние вершины. Ребро называется *вертикальным*, если оно параллельно Oy, и *горизонтальным*, если параллельно Ox.

• *Ориентированный путь на решетке* — это последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$ различных вершин решетки такая, что для любого $i = 1$, ..., $n-1$ вершины a_i и a_{i+1} соседние.

Аналогично определяется цикл, с дополнением, что $a_1 = a_n$ и $n > 2$ (а остальные вершины различны).

Античастицы

- *Перестановка начальной вершины цикла* — это удаление первой вершины из последовательности, затем циклическая перестановка вершин и добавление последней вершины получившейся последовательности в начало.
- *Замкнутый путь* — это цикл с точностью до перестановки начальной вершины цикла.
- *Конфигурация петель* λ — это объединение непересекающихся замкнутых путей на решетке.
- *Конфигурация петель* λ *с беспорядками в* P *и* Q — это объединение непересекающихся замкнутых путей на решетке и ровно одного (незамкнутого) пути из вершины P в вершину Q.

Античастицы

Для любой конфигурации λ мы определяем её *вес* по следующей формуле:

$$\text{weight}(\lambda) = \frac{(-1)^{\#\text{paths}(\lambda)}}{(1+m^2\varepsilon^2)^{\#\text{horizontal}(\lambda)/2}(i\delta)^{\#\text{vertices}(\lambda)}},$$

где $\#\text{paths}(\lambda)$ — количество путей в конфигурации, $\#\text{horizontal}(\lambda)$— количество их горизонтальных ребер, а $\#\text{vertices}(\lambda)$ — количество их вершин.

Античастицы

$$x' := x \bmod \varepsilon T;$$

$$t' := t \bmod \varepsilon T.$$

- *Пропагатор на конечной решетке* — это функция

$$A(x,t,m,\varepsilon,T,\delta) = \frac{\sum_{\substack{\text{по конфигурациям } \lambda \\ \text{с беспорядками} \\ \text{в точках } (0{,}0) \text{ и } (x',t')}} \mathrm{weight}(\lambda)}{\sum_{\substack{\text{по конфигурациям } \lambda \\ \text{без беспорядков}}} \mathrm{weight}(\lambda)}. \qquad (7)$$

- *Пропагатор на бесконечной решетке* — это функция

$$A^{\mathrm{loop}}(x,t,m,\varepsilon) = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{T \nearrow \infty} A(x,t,m,\varepsilon,T,\delta). \qquad (8)$$

Теорема

Функции $A(x,t,m,\varepsilon)$ *и* $A^{\mathrm{loop}}(x,t,m,\varepsilon)$ *определены корректно и более того, совпадают для всех* x,t,m,ε*:*

$$A^{\mathrm{loop}}(x,t,m,\varepsilon) = A(x,t,m,\varepsilon). \tag{9}$$

Лемма

Для любых $m, \varepsilon > 0$ *и* $(x, t) \in \varepsilon\mathbb{Z}$ *таких, что* $(x + t)/\varepsilon$ *четно:*

$$A(x, t, m, \varepsilon) = \frac{\sqrt{1 + m^2\varepsilon^2}}{2m\varepsilon} a_1(x, |t| + \varepsilon, m, \varepsilon).$$

Теорема

Для любых $m, \varepsilon > 0$ *и* $(x,t) \in \varepsilon\mathbb{Z}^2$, *таких что* $m\varepsilon \leqslant 1$ *и* $|x| \neq |t|$, *верно*

$$A(x,t,m,\varepsilon) = \begin{cases} J_0(ms)/2 + O\left(\varepsilon\Delta\right), & \text{если } |x|<|t| \text{ и } (x+t)/\varepsilon \text{ нечетно;} \\ -iY_0(ms)/2 + O\left(\varepsilon\Delta\right), & \text{если } |x|<|t| \text{ и } (x+t)/\varepsilon \text{ четно;} \\ 0, & \text{если } |x|>|t| \text{ и } (x+t)/\varepsilon \text{ нечетно;} \\ iK_0(ms)/\pi + O\left(\varepsilon\Delta\right), & \text{если } |x|>|t| \text{ и } (x+t)/\varepsilon \text{ четно;} \end{cases}$$

где $s := \sqrt{|t^2 - x^2|}$, *а* $\Delta := \frac{1}{||x|-|t||} + m^2(|x|+|t|)$.

Литература

- A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (2001), 37–49.
- R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965.
- M. Dmitriev, Feynman Checkers with Absorption, // Siberian Electronic Mathematical Reports — 2023 — 20, № 2, 626-637
- M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.
- S.E. Venegas-Andraca, Quantum walks: a comprehensive review, Quantum Inf. Process. 11 (2012), 1015–1106