

Асимптотические свойства волновой функции в модели «Шашки Фейнмана»

Фёдор Куянов, 4 курс ФКН

Семинар лаборатории теоретической информатики НИУ ВШЭ, 18.04.2024

План

- Определение модели «Шашки Фейнмана»
- Доказательство интегральной формулы при помощи преобразования Фурье
- Оценка интеграла с помощью комплексного анализа и конформных отображений

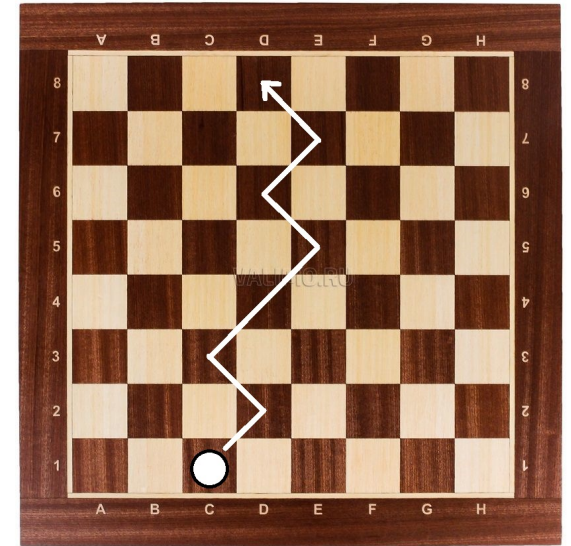
Немного истории

- В начале 20-го века физики обнаружили, что мир вокруг нас принципиально не детерминирован, так появилась *Квантовая Теория Поля* (КТП)
- В КТП для расчёта даже самых простых систем требуются огромные вычисления, которые невозможно математически формализовать (диаграммы Фейнмана, интегралы по путям)
- Шапки Фейнмана – способ описать электрон элементарно и на математическом уровне строгости
- Эта модель очень проста и элегантна!

Шашки Фейнмана – базовая модель

Неформальное определение

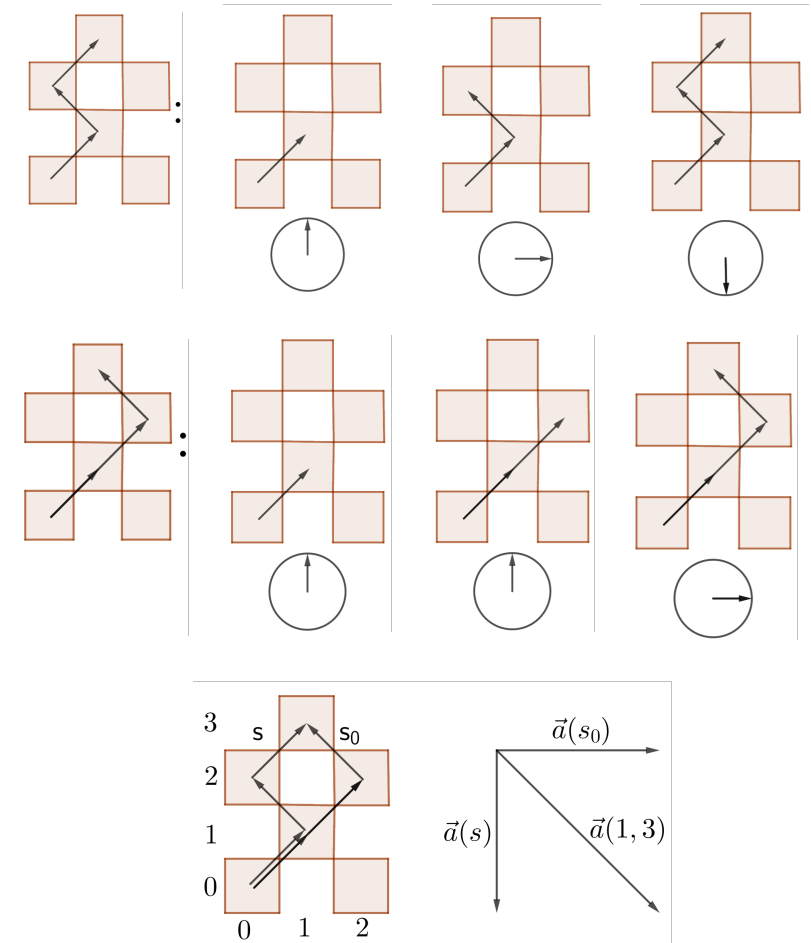
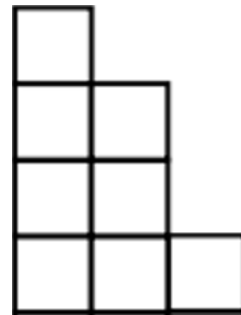
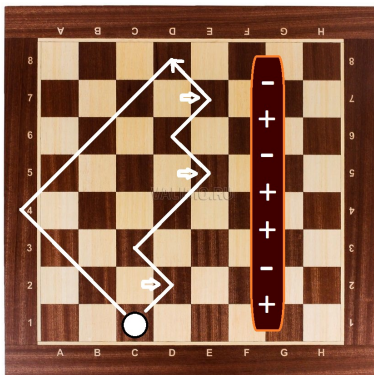
- Пусть шашка стоит в клетке $(0, 0)$ и хочет добраться до (x, t) .
- Рассмотрим все пути из $(0, 0)$ в (x, t) , проходящие через $(1, 1)$, состоящие из ходов влево-вверх и вправо-вверх.
- Каждому пути сопоставим единичный вектор: изначально он смотрит вверх, а при каждом повороте шашки он поворачивается на 90° .
- $a(x, t)$ – сумма векторов, умноженная на $2^{(1-t)/2}$.
- $|a(x, t)|^2$ - вероятность обнаружить электрон, испущенный из $(0, 0)$, в точке x в момент времени t .



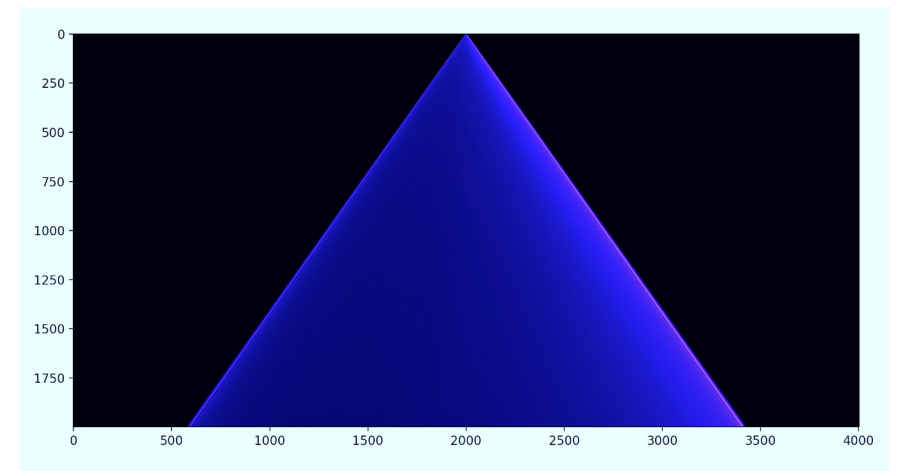
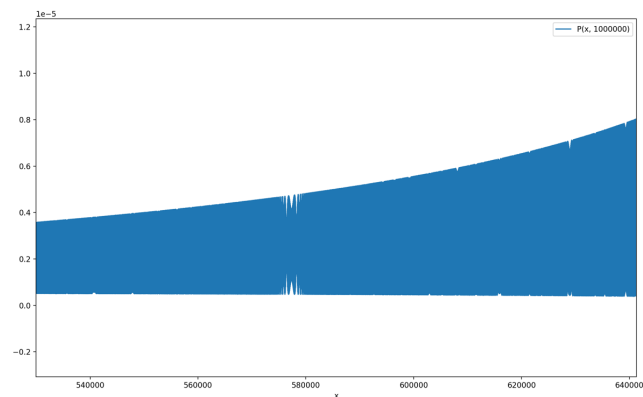
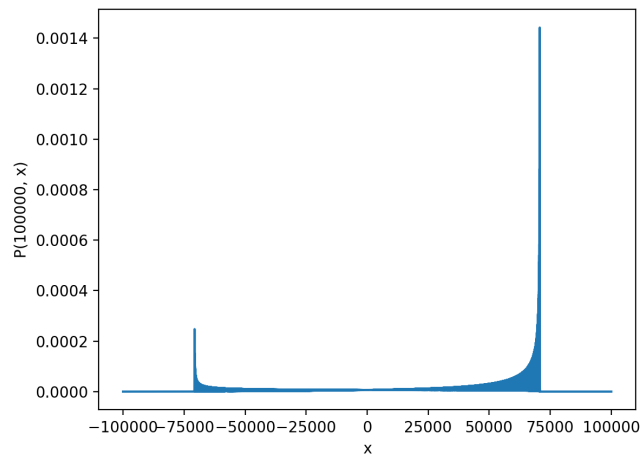
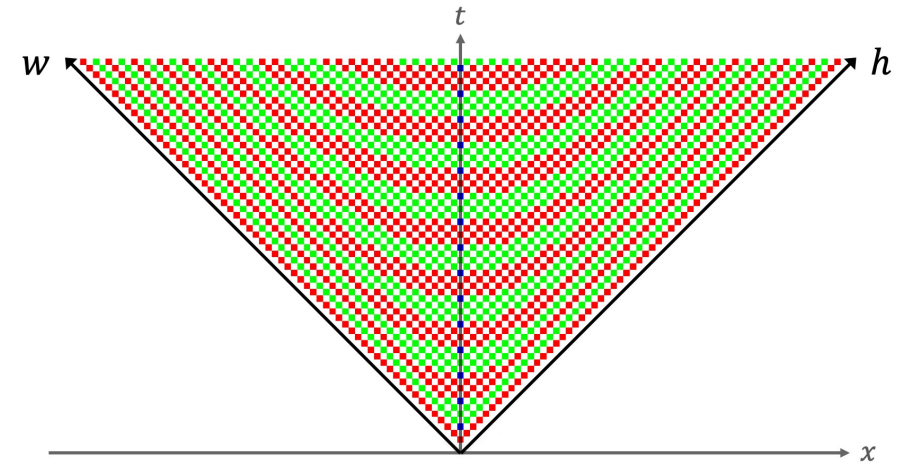
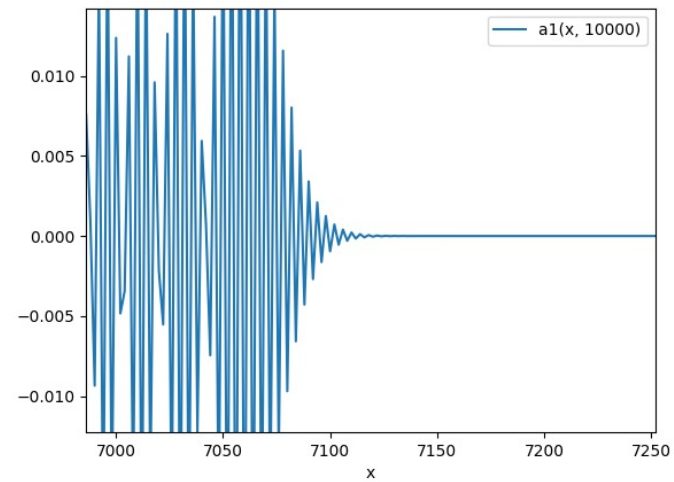
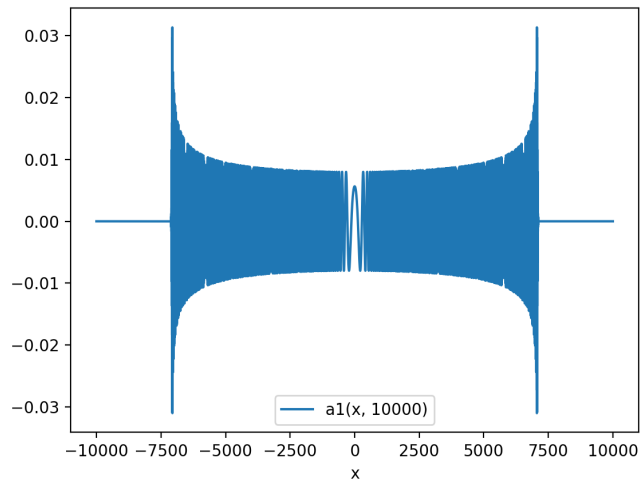
Путь шашки из $(0, 0)$ в $(1, 7)$, состоящий из 5 поворотов, т.е. вектор будет смотреть вверх

Шашки Фейнмана – базовая модель

- Пример: $a(1, 3) = (0.5, -0.5)$
- $\text{Re } a(h - w, h + w)$ имеет связь с диаграммами Юнга размера $w \times h$
- Обозначим $a_1(x, t) := \text{Re } a(x, t)$,
 $a_2(x, t) := \text{Im } a(x, t)$.



Визуализация волновой функции



Интегральная формула

Теорема (интеграл Фурье). Для любых целых x и $t > 0$, т.ч. $x + t$ чётно, выполнено

$$a_1(x, t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ipx - i\omega_p(t-1)} dp}{\sqrt{1 + \sin^2 p}},$$

$$a_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{\sin p}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} \right) e^{ip(x-1) - i\omega_p(t-1)} dp,$$

$$\text{где } \omega_p := \arccos\left(\frac{\cos p}{\sqrt{2}}\right).$$

Вывод интегральной формулы

Предложение (уравнение Дирака). Для любых целых x и $t > 0$, т.ч. $x + t$ чётно, выполнено

$$a_1(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_2(x + 1, t - 1) + \frac{1}{\sqrt{2}} a_1(x + 1, t - 1),$$

$$a_2(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_2(x - 1, t - 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} a_1(x - 1, t - 1).$$

Вывод интегральной формулы

Доказательство уравнения Дирака.

Множество путей в (x, t) разобьём на два: проходящие через $(x - 1, t - 1)$ и через $(x + 1, t - 1)$. Первое даёт вклад только в a_2 , второе только в a_1 . Предложение следует из рассмотрения 4 случаев движения шашки за последние 2 хода.

Вывод интегральной формулы

Преобразование Фурье. Рассмотрим

$$\hat{a}_1(p, t) := \sum_x e^{-ipx} a_1(x, t), \quad \hat{a}_2(p, t) := \sum_x e^{-ipx} a_2(x, t).$$

Тогда обратное преобразование записывается как

$$a_1(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx} \hat{a}_1(p, t) dp, \quad a_2(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx} \hat{a}_2(p, t) dp.$$

Вывод интегральной формулы

Из уравнения Дирака получаем соотношение на Фурье-образы:

$$\hat{a}_1(p, t) = \frac{e^{ip}}{\sqrt{2}} \hat{a}_1(p, t - 1) + \frac{e^{ip}}{\sqrt{2}} \hat{a}_2(p, t - 1),$$

$$\hat{a}_2(p, t) = -\frac{e^{-ip}}{\sqrt{2}} \hat{a}_1(p, t - 1) + \frac{e^{-ip}}{\sqrt{2}} \hat{a}_2(p, t - 1).$$

Другими словами,
$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t) \\ \hat{a}_2(p, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{ip} & e^{ip} \\ -e^{-ip} & e^{-ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t-1) \\ \hat{a}_2(p, t-1) \end{pmatrix}.$$

(оператор перехода)

Вывод интегральной формулы

Раскладываем $\begin{pmatrix} \hat{a}_1(p,t) \\ \hat{a}_2(p,t) \end{pmatrix}$ по собственному базису и получаем

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_1(p,t) \\ \hat{a}_2(p,t) \end{pmatrix} = c_1(p)\lambda_1(p)^{t-1}v_1(p) + c_2(p)\lambda_2(p)^{t-1}v_2(p),$$

где $\lambda_1(p), \lambda_2(p)$ – собственные значения оператора перехода,
 $v_1(p), v_2(p)$ – собственные вектора оператора перехода,
 $c_1(p), c_2(p)$ – коэф. разложения $\begin{pmatrix} \hat{a}_1(p,1) \\ \hat{a}_2(p,1) \end{pmatrix}$ по соб. базису.

Вывод интегральной формулы

Найдём собственные значения и вектора у $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{ip} & e^{ip} \\ -e^{-ip} & e^{-ip} \end{pmatrix}$:

$$\lambda_1(p) = \frac{\cos p + \sqrt{\cos^2 p - 2}}{\sqrt{2}},$$

$$v_1(p) = \begin{pmatrix} \cos p + i \sin p \\ \sqrt{\cos^2 p - 2} - i \sin p \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2(p) = \frac{\cos p - \sqrt{\cos^2 p - 2}}{\sqrt{2}},$$

$$v_2(p) = \begin{pmatrix} \cos p + i \sin p \\ -\sqrt{\cos^2 p - 2} - i \sin p \end{pmatrix}.$$

Вывод интегральной формулы

Найдём $c_1(p), c_2(p)$.

$$\begin{aligned} a_1(x, 1) &= 0, & a_2(x, 1) &= I[x = 1], \\ \hat{a}_1(x, 1) &= 0, & \hat{a}_2(x, 1) &= e^{-ip}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e^{-ip} \end{pmatrix} = \frac{e^{-ip}}{2\sqrt{\cos^2 p - 2}} (v_1 - v_2),$$

$$\text{т.е. } c_1(p) = \frac{e^{-ip}}{2\sqrt{\cos^2 p - 2}}, \quad c_2(p) = -\frac{e^{-ip}}{2\sqrt{\cos^2 p - 2}}.$$

Вывод интегральной формулы

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} \hat{a}_1(p, t) \\ \hat{a}_2(p, t) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{e^{-ip}}{2\sqrt{\cos^2 p - 2}} \left[\frac{\cos p + \sqrt{\cos^2 p - 2}}{\sqrt{2}} \right]^{t-1} \begin{pmatrix} e^{ip} \\ \sqrt{\cos^2 p - 2} - i \sin p \end{pmatrix} \\
 &- \frac{e^{-ip}}{2\sqrt{\cos^2 p - 2}} \left[\frac{\cos p - \sqrt{\cos^2 p - 2}}{\sqrt{2}} \right]^{t-1} \begin{pmatrix} e^{ip} \\ -\sqrt{\cos^2 p - 2} - i \sin p \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\hat{a}_1(p, t) = \frac{2i \sin(\omega_p(t-1))}{2\sqrt{\cos^2 p - 2}} = \frac{\sin(\omega_p(t-1))}{\sqrt{1 + \sin^2 p}}.$$

Вывод интегральной формулы

Применяем обратное преобразование Фурье:

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipx} \hat{a}_1(p, t) dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ipx} \sin(\omega_p(t-1))}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} dp \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ipx - i\omega_p(t-1)}}{\sqrt{1 + \sin^2 p}} dp = \frac{i^{x-t+2}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ipx + i\tilde{\omega}_p(t-1)}}{\sqrt{1 + \cos^2 p}} dp, \end{aligned}$$

$$\text{где } \tilde{\omega}_p := \arcsin \frac{\sin p}{\sqrt{2}}.$$

Известные асимптотические результаты

- Ambainis et al. (2001) [1] – асимптотика между пиками (рис. 1, левая область)
- T. Sunada, T. Tate (2012) [2] – оценка остаточного члена + неравномерные асимптотики вокруг и снаружи пиков (рис. 1, центральная и правая области)

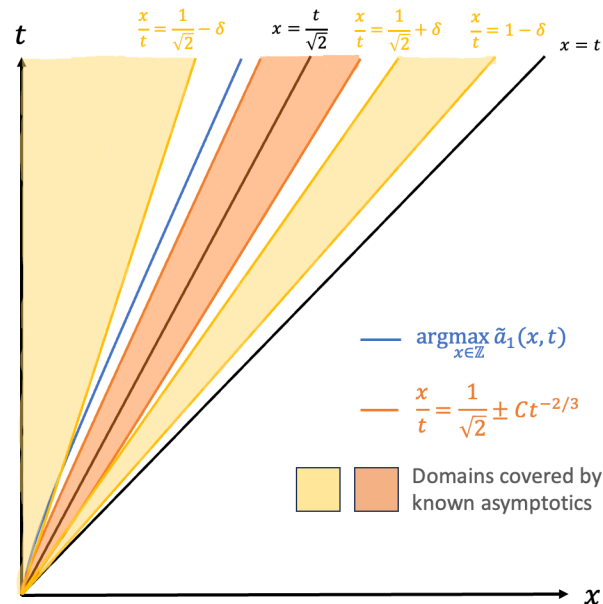


Рис. 1
Области, где асимптотические формулы уже были известны

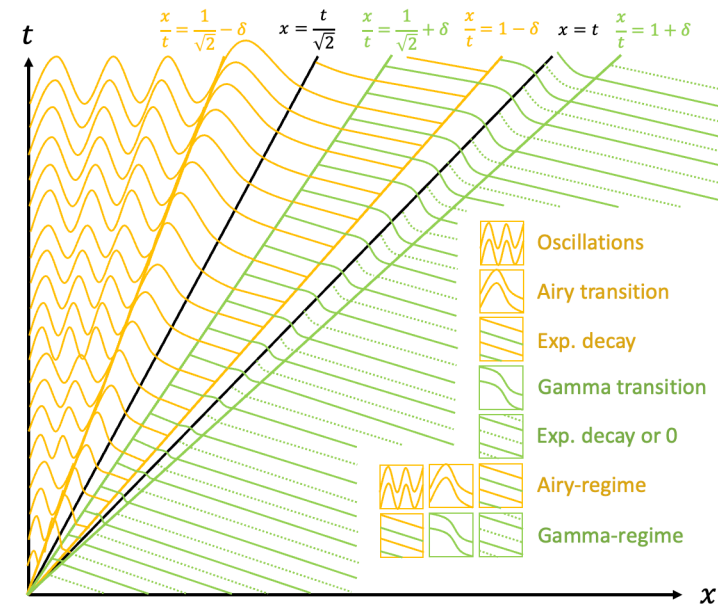


Рис. 2
Области, которые покрываются результатами нашей работы

Асимптотическая формула

Теорема 1.1 [Дрмота, К., Скопенков, Устинов] (асимптотика между пиками).

Для любых целых x и $t > 0$, таких что $0 \leq v = \frac{x}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, выполнено

$$a_1(x, t + 1) = \frac{i^{x-t+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ipx+i\tilde{\omega}_p t}}{\sqrt{1 + \cos^2 p}} dp = \frac{i^{x-t+1}}{\sqrt[3]{t}} \left(\frac{4\theta(v)}{2v^2 - 1} \right)^{1/4} \text{Ai}(-\theta(v)t^{2/3}) + O(t^{-3/2}),$$

$$\text{где } \theta(v) := \left(\frac{3}{2} \left(-v \operatorname{atan} \frac{\sqrt{1-2v^2}}{v} + \operatorname{atan} \sqrt{1-2v^2} \right) \right)^{2/3}, \quad (+O(t^{-1}) - \text{П. Закорко [3]})$$

$$\text{Ai}(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \left(\lambda p + \frac{p^3}{3} \right) dp - \text{функция Эйри.}$$

Асимптотическая формула

Гипотеза 1.2 [Дрмота, К., Скопенков, Устинов] (асимптотика снаружи пиков).

Для любых целых x и $t > 0$, таких что $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq v = \frac{x}{t} < 1 - \delta$, выполнено

$$a_1(x, t + 1) = \frac{i^{x-t+1}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ipx+i\tilde{\omega}_p t}}{\sqrt{1 + \cos^2 p}} dp = \frac{i^{x-t+1}}{\sqrt[3]{t}} \left(\frac{4\theta(v)}{2v^2 - 1} \right)^{1/4} \text{Ai}(-\theta(v)t^{2/3}) \times (1 + O(t^{-1})),$$

$$\text{где } \theta(v) := - \left(\frac{3}{2} \left(v \operatorname{atanh} \frac{\sqrt{1-2v^2}}{v} - \operatorname{atanh} \sqrt{1-2v^2} \right) \right)^{2/3},$$

$$\text{Ai}(\lambda) := \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \left(\lambda p + \frac{p^3}{3} \right) dp - \text{функция Эйри.}$$

Идея доказательства теоремы 1.1

Обозначим $a(p) := \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 p}}$, $\omega(p) = \tilde{\omega}_p := \arcsin \frac{\sin p}{\sqrt{2}}$.

Нас интересует интеграл вида

$$I(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(p) e^{it\omega(p) - ipx} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} a(p) e^{it(vp - \omega(p))} dp,$$

причём $a(p)$ – чётная функция, $\omega(p)$ – нечётная, $x, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Идея доказательства теоремы 1.1

Основная идея – сделать замену $z_v(p)$, $\theta(v)$:

$$\mathcal{L}_v(p) = vp - \omega(p) = \frac{z_v(p)^3}{3} - \theta(v)z_v(p) = F_\theta(z_v(p)).$$

Существование замены следует из нечётности $\omega(p)$ и технических условий на ω' при помощи техники конформных отображений.

$$I(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} a(p) e^{it(vp - \omega(p))} dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} G_v(z) e^{itF_\theta(z)} dz,$$

где $G_v(z) := a(p_v(z))p'_v(z)$.

Идея доказательства теоремы 1.1

Интуиция за заменой $z_v(p)$

- При увеличении v критические точки $\mathcal{L}_v(p)$ вещественны и стремятся к 0 при $v \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- У кубического многочлена $F_\theta(z)$ критические точки ведут себя похожим образом: они вещественны при $\theta \geq 0$ и стремятся к 0 при $\theta \rightarrow 0$.
- При условии $0 \leq v \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ имеем $\theta(v) \geq 0$.
- Замена $z_v(p)$ переводит критическую точку ф-ции $\mathcal{L}_v(p)$ (\hat{p}) в критическую точку ф-ции $F_\theta(z)$ ($\sqrt{\theta}$):

$$z_v(\hat{p}) = \sqrt{\theta}, \quad p_v(\sqrt{\theta}) = \hat{p}.$$

Идея доказательства теоремы 1.1

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} G_v(z) e^{itF\theta(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \left(G_v(\sqrt{\theta}) + (z^2 - \theta) \tilde{G}_v(z) \right) e^{itF\theta(z)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(G_v(\sqrt{\theta}) I_1 + I_2 \right), \end{aligned}$$

где $I_1 := \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} e^{itF\theta(z)} dz$, $I_2 := \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \tilde{G}_v(z) (z^2 - \theta) e^{itF\theta(z)} dz$

Идея доказательства теоремы 1.1

I_1 при помощи замены $k = \sqrt[3]{t}z$ выражается через функцию Эйри:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} e^{itF_\theta(z)} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itF_\theta(z)} dz - 2 \int_{z_v(\pi)}^{+\infty} \cos(tF_\theta(z)) dz \\ &= \frac{2}{\sqrt[3]{t}} \int_0^\infty \cos\left(\frac{k^3}{3} - \theta t^{\frac{2}{3}}k\right) dk + o\left(\frac{1}{t^2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{t}} Ai(-\theta t^{2/3}) + o\left(\frac{1}{t^2}\right). \end{aligned}$$

Идея доказательства теоремы 1.1

I_2 оценивается при помощи интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \tilde{G}_v(z) (z^2 - \theta) e^{itF_\theta(z)} dz = \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \frac{\tilde{G}_v(z) d e^{itF_\theta(z)}}{it} \\ &= \frac{\tilde{G}_v(z) e^{itF_\theta(z)}}{it} \Big|_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} - \frac{1}{it} \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \tilde{G}'_v(z) e^{itF_\theta(z)} dz. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно 0, поскольку $F_\theta(z_v(\pi)) = v\pi - \omega(\pi) = v\pi$ и функция $\tilde{G}_v(z)$ чётная.

Идея доказательства теоремы 1.1

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{it} \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \tilde{G}'_v(z) e^{itF\theta(z)} dz \\ &= -\frac{1}{it} \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \left(k_v z + (z^2 - \theta) \tilde{H}_v(z) \right) e^{itF\theta(z)} dz = -\frac{1}{it} (k_v I_3 + I_4), \end{aligned}$$

где $I_3 := \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} e^{itF\theta(z)} z dz$, $I_4 := \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \tilde{H}_v(z) (z^2 - \theta) e^{itF\theta(z)} dz$.

Идея доказательства теоремы 1.1

I_3 при помощи замены $k = \sqrt[3]{t}z$ выражается через производную функции Эйри:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} e^{itF_\theta(z)} z dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itF_\theta(z)} z dz - 2i \int_{z_v(\pi)}^{\infty} \sin(tF_\theta(z)) z dz \\ &= \frac{2i}{t^{2/3}} \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{k^3}{3} - \theta t^{\frac{2}{3}}k\right) k dk + O\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{2\pi i}{t^{2/3}} Ai'(-\theta t^{2/3}) + O\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Идея доказательства теоремы 1.1

I_4 оценивается при помощи интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} I_4 &= \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \tilde{H}_v(z) (z^2 - \theta) e^{itF\theta(z)} dz = \int_{-z_v(\pi)}^{z_v(\pi)} \frac{\tilde{H}_v(z) de^{itF\theta(z)}}{it} \\ &= O\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } I_2 = -\frac{1}{it} (k_v I_3 + I_4) = -\frac{1}{it} \left(k_v O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + O\left(\frac{1}{t}\right) \right) = O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Идея доказательства теоремы 1.1

Собираем всё вместе:

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \frac{1}{2\pi} (G_v(\sqrt{\theta})I_1 + I_2) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(G_v(\sqrt{\theta}) \frac{2\pi}{\sqrt[3]{t}} \text{Ai}(-\theta t^{2/3}) + O\left(\frac{1}{t^2}\right) + O(t^{-3/2}) \right) \\ &= \frac{G_v(\sqrt{\theta})}{\sqrt[3]{t}} \text{Ai}(-\theta t^{2/3}) + O(t^{-3/2}). \end{aligned}$$

Осталось вспомнить, что $G_v(\sqrt{\theta}) = a(p_v(\sqrt{\theta})) p'_v(\sqrt{\theta}) = \frac{a(\hat{p})}{z'_v(\hat{p})}$, где \hat{p} - критическая точка функции $\mathcal{L}_v(p) = vp - \omega(p)$.

Идея доказательства гипотезы 1.2

- При $\nu > \frac{1}{\sqrt{2}}$ критические точки функции $\mathcal{L}_\nu(p)$ лежат на мнимой оси.
- При $\theta < 0$ критические точки кубического многочлена $F_\theta(z)$ также лежат на мнимой оси.
- Сделаем такую же замену $\mathcal{L}_\nu(p) = F_\theta(z_\nu(p))$, но теперь отрезок $[-z_\nu(\pi); z_\nu(\pi)]$ не проходит через критическую точку.
- Идея: сдвинем отрезок интегрирования вверх, чтобы он прошёл через критическую точку:

$$[-z_\nu(\pi); z_\nu(\pi)] \rightarrow [-z_\nu(\pi) + \sqrt{\theta}; z_\nu(\pi) + \sqrt{\theta}],$$

интегралы по вертикальным отрезкам сократятся благодаря 2π -периодичности.

Список литературы

- [1] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous. One-dimensional quantum walks. In Proceedings of the Thirty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing.
- [2] T. Sunada and T. Tate. Asymptotic behavior of quantum walks on the line. *J. Funct. Anal.*, 262(6):2608–2645, 2012.
- [3] P. Zakorko. Feynman checkers: a uniform approximation of the wave function by airy function. preprint.
- [4] F. Kuyanov and A. Slizkov. Feynman checkers: number-theoretic properties. *Rev. Math. Phys.*, 35(09):2350022, 2023.