Открытая весенняя студенческая олимпиада по математике

Факультета компьютерных наук ВШЭ

2 июня 2024, 11:00 – 15:00

1. Для каждого целого неотрицательного числа n определим функцию $S(n) = n - m^2$, где m – наибольшее такое целое число, что $m^2 \leq n$. Для заданного натурального параметра A определим последовательность $a_0 = A$ и $a_{k+1} = a_k + S(a_k)$ для $k \geq 0$. Для каких натуральных чисел A эта последовательность стабилизируется (начиная с какого-то элемента будет постоянной)?

2. Будем говорить, что отрезок I "протыкает" сферу S (в трёхмерном пространстве), если I пересекает S в двух точках (включая случай, когда эти две точки совпадают). Какое максимальное количество неперекрывающихся сфер единичного радиуса (касаться друг друга сферы могут, содержать общие точки внутренности – нет) может протыкать отрезок длины 100?

3. Найдите все такие матрицы X, что $X^2 = A$, где матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

4. Найдите максимальное значение выражения

$$\int_0^1 |f'(x)|^2 |f(x)| \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

среди всех непрерывно дифференцируемых функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ с условиями $f(0) = 0$ и $\int\limits_0^1 |f'(x)|^2 dx \leq 1$.

5. Обозначим через $r(n)$ максимальное количество прямоугольных треугольников, вершины которых принадлежат какому-то множеству из n различных точек на плоскости. Докажите, что

i.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r(n)}{n^2} = \infty$;

ii.) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r(n)}{n^3} = 0$.