ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук
Образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

УДК: 512.64, 519.17

Отчет об исследовательском проекте

Исследование многодольных подграфов регулярного графа кольца матриц.

Выполнил:
Студент группы БПМИ214 ТИ
Гусев Иван Ильич

13.05.2023

Дата | Подпись

Принял руководитель проекта:
Артем Максимович Максаев
Доцент департамента, кандидат физико-математических наук
Факультет компьютерных наук / Департамент больших данных и информационного поиска

Дата | Подпись

Москва 2024

Исследование многодольных подграфов регулярного графа кольца матриц.

Содержание

1 Введение

Работа посвящена изучению подграфов регулярного графа кольца матриц, определенного ниже, в частности подграфов $\Gamma_2(\mathbb{Q})$. Во втором разделе проведен обзор результатов статьи [2], в третьем показано, что хроматическое число регулярного графа может быть бесконечным (результат статьи [3]), четвертый раздел посвящен исследованию вопроса вложенности полных многодольных подграфов в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$, получены результаты, отраженные в теореме 4.7, последний раздел же включает в себя исследование вопросов эквивалентности клик в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$, важной в этом разделе является теорема 5.7, подтверждающая, что существует бесконечное число неэквивалентных клик.

Введем некоторые обозначения, которые используются в курсовой работе:

- Под кольцом понимается ассоциативное кольцо (не обязательно содержащее 1).
- $\omega(G)$ — кликовое число графа G, т. е. максимальное число вершин, которые попарно соединены ребрами.
- $\alpha(G)$ — число независимости графа G, т. е. максимальное число вершин, которые попарно не соединены ребрами.
- $\chi(G)$ — хроматическое число графа G, т. е. минимальное число цветов, в которое можно покрасить вершины графа, чтобы вершины, соединенные ребром, были покрашены в разные цвета.
- $Z(R)$ — множество двусторонних делителей нуля кольца R.
- $Reg(\Gamma(R))$ — регулярный граф кольца R, т. е. граф, вершинами которого являются элементы из $R \setminus Z(R)$; две вершины соединены ребром, тогда и только тогда, когда их сумма лежит в $Z(R)$.
- $\Gamma_n(R)$ — регулярный граф кольца матриц $n \times n$ над кольцом R, т. е. $Reg(\Gamma(M_n(R)))$.
- $\Gamma(X)$ — подграф регулярного графа $Reg(\Gamma(R))$, индуцированный элементами $X \subset R$.
- $GL_n(R)$ — обратимые матрицы $n \times n$ с элементами в кольце R.
- $T_n(R)$ —верхнетреугольные матрицы $n \times n$ с элементами в кольце R.
- $\Gamma'_n(R)$ — подграф регулярного графа $\Gamma_n(R)$ индуцированный вершинами $GL_n(R)$. (В случае, когда R — поле, $\Gamma'_n(R)$ совпадает с $\Gamma_n(R)$.)
- $O(n)$ — группа ортогональных матриц $n \times n$ над некоторым полем F, т. е. $\{A \in GL_n(F) \mid AA^T = A^TA = E\}$.
- $\langle A \rangle$ — циклическая группа, порожденная $A \in GL_n(F)$, т. е. $\{A^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. ($F$ — поле.)
- $\Gamma(A)$ — регулярный граф $\Gamma(\langle A \rangle)$, где $A \in GL_n(F)$. (F — поле.)
- $K(d_1, d_2, \dots d_k)$ — k-дольный подграф с $d_1 + d_2 + \cdots + d_k$ вершинами, в i-й доле d_i вершин, любые две вершины из разных долей соединены ребром, а вершины из одной доли — нет. $d_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, если $d_i = \infty$, значит в i-й доле счетное число вершин.

В частности, нас будет интересовать $\Gamma_n(\mathbb{F})$ — регулярный граф кольца матриц над полем. Множество $Z(M_n(\mathbb{F})) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid \det(A) = 0\}$, соответственно, вершинами графа $\Gamma_n(\mathbb{F})$ будут являться невырожденные матрицы – $GL_n(\mathbb{F})$, а ребрами будут соединены две матрицы A, B, если $\det(A + B) = 0$.

2 Результаты статьи [2].

В данном разделе подробно описаны результаты статьи [2] о хроматическом числе некоторых подграфов регулярного графа.

Теорема 2.1. *Если* F *— поле, char* $F \neq 2$*, тогда* $\chi(\Gamma(T_n(F))) = \omega(\Gamma(T_n(F))) = 2^n$.

Доказательство.

1. $\omega(\Gamma(T_n(F))) \geq 2^n$. Следует из того, что существует клика $\mathrm{diag}(\pm 1, \pm 1, \cdots \pm 1)$ из 2^n матриц.

2. $\chi(\Gamma(T_n(F))) \leq 2^n$. Потому что можно покрасить граф в 2^n цветов. Для этого разобьем $F \backslash \{0\}$ на F_+ и F_-, так что x и $-x$ лежат в разных множествах.
   Каждой матрице $A \in \Gamma(T_n(F))$ сопоставим строчку $s(A) \in \{-,+\}^n$. Пусть на диагонали матрицы A стоят числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ($d_i \neq 0$, так как $\det(A) \neq 0$), тогда $s(A)_i = \begin{cases} +, \text{если } d_i \in F_+ \\ -, \text{если } d_i \in F_- \end{cases}$. Для каждой из строчек определим свой цвет (один из 2^n) и покрасим матрицу A в цвет, соответствующий ее строчке $s(A)$. Пусть две верхнетреугольные матрицы A и B соответствуют одинаковой строке ($s(A) = s(B)$), обозначим числа на диагоналях A и B, за $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ соответственно. Тогда $A + B$ – верхнетреугольная матрица с определителем $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \ldots (a_n + b_n) \neq 0$. (Иначе $a_i + b_i = 0$, значит, они "разного знака"и $s(A) \neq s(B)$.)
   Значит, матрицы, соответствующие одной строке, попарно не соединены ребрами. Следовательно, раскраска правильная.

А также известно, что $\chi(G) \geq \omega(G)$, значит, имеем $2^n \geq \chi(\Gamma(T_n(F))) \geq \omega(\Gamma(T_n(F))) \geq 2^n$, то есть $\chi(\Gamma(T_n(F))) = \omega(\Gamma(T_n(F))) = 2^n$. ∎

Лемма 2.2. *Если* $H \subset G$ *— две подгруппы* $GL_n(F)$*, то* $\chi(\Gamma(G)) \leq [G : H]\chi(\Gamma(H))$.
В частности, если $\chi(\Gamma(G))$ *– бесконечно, а индекс подгруппы* H *в* G *– конечен, то* $\chi(H)$ *– бесконечно.*

Доказательство. Пусть $\Gamma(H)$ раскрашен в k цветов (k может быть бесконечным), H_α — множество вершин, покрашенных в цвет α. Покрасим каждый левый смежный класс aH в свой набор из k цветов, так чтобы элементы aH_α были покрашены в цвет α своего набора. Тогда покраска каждого смежного класса будет удовлетворять требованиям. Цвета в разных смежных классах не пересекаются, значит раскраска $\Gamma(G)$ правильная и общее число цветов $k \cdot [G : H]$. Откуда $\chi(\Gamma(G)) \leq [G : H]\chi(\Gamma(H))$. ∎

Теорема 2.3. *Если* F *— поле,* G *— разрешимая подгруппа* $GL_n(F)$*, то* $\chi(\Gamma(G)) < \infty$

Доказательство. Расширим F до алгебраически замкнутого поля F', G будет разрешима в $GL_n(F')$.
По теореме *Колчина-Мальцева* (теорема 45.1.1 из книги [4]) разрешимая подгруппа $G \subset GL_n(F')$ над алгебраически замкнутым полем F' содержит триангулируемую подгруппу H с конечным индексом.
$\exists A \in GL_n(F') : AHA^{-1} \subset T_n(F') \Rightarrow \chi(\Gamma(H)) = \chi(\Gamma(AHA^{-1})) \leq \chi(\Gamma(T_n(F'))) = 2^n$ (по теореме 2.1), значит $\chi(\Gamma(H)) < \infty$. А также $[G : H] < \infty$, применяя лемму 2.2, имеем $\chi(\Gamma(G)) \leq [G : H]\chi(\Gamma(H)) < \infty$. Откуда $\chi(\Gamma(G))$ — конечно. ∎

Теорема 2.4. *Если* $X \subset GL_n(\mathbb{R})$ *или* $X \subset GL_n(\mathbb{C})$ *— компакт в Евклидовом пространстве, то* $\chi(\Gamma(X)) < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим непрерывную функцию $f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, (аналогично с полем $\mathbb{C}$) $f(A, B) = \det(A + B)$. Если $\det(A) \neq 0 \Rightarrow f(A, A) \neq 0$, тогда существует U_A окрестность точки A, такая что для любых $A_1, A_2 \in U_A$ $f(A_1, A_2) \neq 0$. Рассмотрим покрытие X открытыми множествами $\{U_A \mid A \in X\}$. Так как X — компакт, можно выбрать конечное число подмножеств $U_1, U_2, \dots, U_k$, покрывающих X. Тогда можно избавиться от пересечения подмножеств: $X = U_1' \sqcup U_2' \sqcup \dots \sqcup U_k'$. Матрицы лежащие в U_i не соединены ребрами, значит можно покрасить матрицы, лежащие в U_i' в цвет i и получить корректную раскраску в конечное число цветов. Откуда $\chi(\Gamma(X)) < \infty$. ■

Следствие 2.5. $\chi(\Gamma(O(n))) < \infty$

Доказательство. Сначала получим, что $O(n)$ компакт в $GL_n(\mathbb{R})$.
Строки матрицы образуют (ортогональный базис) вектора длины 1, значит каждое число в матрице не больше 1, из чего $O(n)$ ограничено.
Пусть (A_n) – последовательность ортогональных матриц, $A_n \to B$ при $n \to \infty$, покажем, что B тоже ортогональна. $A_n^T \to B^T$ при $n \to \infty$, откуда $A_n A_n^T \to BB^T$ при $n \to \infty$, с другой стороны $A_n A_n^T = E$, значит и $BB^T = E$.
Значит $O(n)$ ограничено и замкнуто, следовательно $O(n)$ — компакт, а значит по теореме 2.4 имеем $\chi(O(n)) < \infty$. ■

Следствие 2.6. *$\chi(\Gamma(GL_n(\mathbb{R})))$ и $\chi(\Gamma(GL_n(\mathbb{C})))$ не более чем счетно.*

Доказательство. $GL_n(\mathbb{R})$ и $GL_n(\mathbb{C})$ в Евклидовом пространстве гомеоморфно вкладываются в $\mathbb{R}^{n^2}$ и $\mathbb{R}^{2n^2}$ соответственно. Пространство $\mathbb{R}^k$ можно покрыть счетным числом компактных множеств, являющихся k-мерными кубами. Значит и подмножества $GL_n(\mathbb{R})$ и $GL_n(\mathbb{C})$ можно покрыть счетным числом компактов. А по теореме 2.4 для компакта хроматическое число конечно. ■

Далее в доказательствах используется понятие локальных колец.

Определение 2.7. *Локальное кольцо — это кольцо, в котором левый максимальный идеал единственен.*

Приведем несколько общеизвестных утверждений про локальные кольца.

Утверждение 2.8. *В локальном кольце максимальным идеалом является множество всех необратимых элементов.*

Утверждение 2.9. *Также верно утверждение в обратную сторону: если множество необратимых элементов кольца образуют левый идеал, то он максимальный и кольцо локальное.*

Утверждение 2.10. *Если R — локальное кольцо, а $\mathfrak{m}$ — максимальный левый идеал, тогда $R/\mathfrak{m}$ — поле.*

Пример 2.11. *Очевидно, что поле — локальное кольцо с максимальным идеалом $\{0\}$.*

Пример 2.12. *Кольцо степенных рядов $R[[x]] = \{\sum\limits_{i=0} a_i x^i \mid a_i \in R\}$, где R — локальное коммутативное кольцо, является локальным.*

Объясним почему: для каждого обратимого элемента $a_0 + a_1 x + \dots$, честно построим обратный $b_0 + b_1 x + \dots$, при перемножении должно получиться 1, откуда $b_0 = \frac{1}{a_0}, b_1 = -\frac{1}{a_0} a_1 b_0, \dots b_n = -\frac{1}{a_0} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_{n-i}$. Значит, a_0 — обратим, равносильно тому, что ряд обратим.

Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал локального кольца R, тогда множество необратимых элементов $\{a_0 + a_1 x + \cdots \mid a_0 \in \mathfrak{m}\}$. Это множество замкнуто относительно сложения и умножение на степенной ряд (так как $\mathfrak{m}$ замкнуто). Тогда по утверждению 2.9 оно является максимальным идеалом, и $R[[x]]$ — локальное кольцо.

Пример 2.13. *В частности, $F[[x]]$ — локальное кольцо с максимальным идеалом $xF[[x]]$, где F — поле.*

Определение 2.14. *Кольцо называется областью целостности, если оно коммутативно, содержит 1 и не содержит делителей нуля.*

Напомним: $\Gamma'_n(R)$ — подграф регулярного графа $\Gamma_n(R)$ индуцированный вершинами $GL_n(R)$.

Лемма 2.15. *Если R — локальная область целостности, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал, $F = R/\mathfrak{m}$, $charF \neq 2$, тогда $\chi(\Gamma'_n(R)) \leq \chi(\Gamma_n(F))$.*

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\pi : R \to F$, такой что $\pi(x) = x + \mathfrak{m}$. Также можно задать гомоморфизм $\pi_n : M_n(R) \to M_n(F)$, такой что $\pi_n((a_i^j)) = (\pi(a_i^j))$. Пусть существует раскраска $\Gamma_n(F)$ в k цветов. Тогда покрасим матрицу $A \in \Gamma'_n(R)$ в цвет $\pi_n(A)$ и докажем, что такая раскраска правильная. Пусть $A, B \in GL_n(R)$, A и B соединены ребром, тогда $\det(A+B) = 0$. $\det(\pi_n(A) + \pi_n(B)) = \det(\pi_n(A+B)) = \pi(\det(A+B)) = 0$.
Пусть $\pi_n(A) = \pi_n(B)$, тогда $0 = \det(\pi_n(A) + \pi_n(B)) = 2^n \det(\pi_n(A)) = 2^n \pi(\det A) \Rightarrow \det A \in \mathfrak{m}$. Но такого не может быть, потому что $A \in GL_n(R)$.
Следовательно $\pi_n(A) \neq \pi_n(B)$, а также $\det(\pi_n(A) + \pi_n(B)) = 0$, значит $\pi_n(A)$ и $\pi_n(B)$ соединены ребром в $\Gamma_n(F)$ и покрашены в разные цвета. Значит покраска $\Gamma'_n(R)$ в k цветов корректна. Откуда $\chi(\Gamma'_n(R)) \leq \chi(\Gamma_n(F))$. ∎

Теорема 2.16. $\chi(\Gamma'_n(\mathbb{Z})) < \infty$

Доказательство. Рассмотрим локализацию $\mathbb{Z}$ по идеалу $p\mathbb{Z}$ (p – простое, $p \neq 2$), то есть кольцо дробей $R_p = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \notin p\mathbb{Z}\}$. В нем все дроби с числителем, не кратным p, обратимы, так как для $\frac{a}{b}, a \notin p\mathbb{Z}$, дробь $\frac{b}{a}$ лежит в R_p. Остальные дроби образуют идеал pR_p. Он максимален, так как при добавлении еще хотя бы одной дроби мы сразу можем домножить на ее обратную, таким образом получить все кольцо. Тогда $R_p/(pR_p)$ — поле, так как кольцо локально и pR_p — максимальный идеал. Класс эквивалентности $\frac{a}{b} + (pR_p) = c + (pR_p)$, где c таково, что $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{1} \pmod p$, откуда классы эквивалентности факторкольца образуют остатки по модулю p и $R_p/(pR_p) \cong \mathbb{Z}_p$. Применив лемму 2.15 получаем, что $\chi(\Gamma'_n(R_p)) \leq \chi(\Gamma_n(\mathbb{Z}_p)) < \infty$, так как $M_n(\mathbb{Z}_p)$ — конечно.
$\mathbb{Z} \subset R_p$ ($\pi : \mathbb{Z} \to R_p, \pi(n) = \frac{n}{1}$ – гомоморфизм) откуда $\chi(\Gamma'_n(\mathbb{Z})) \leq \chi(\Gamma'_n(R_p)) < \infty$ ∎

Пояснение: $\Gamma'_n(\mathbb{Z})$ — регулярный граф матриц $GL_n(\mathbb{Z})$, то есть таких матриц A, что $\det(A) = \pm 1$. Однако можно рассмотреть большее подмножество $M_n(\mathbb{Z})$, состоящее из матриц с ограниченным определителем, $Z_n(C) = \{A \in M_n(\mathbb{Z}) \mid |\det(A)| \leq C, \det(A) \neq 0\}$.

Следствие 2.17. $\chi(\Gamma(Z_n(C))) < \infty$ $(C \in \mathbb{N})$.

Доказательство. Выберем простое $p > C$ и рассмотрим локальное кольцо R_p из предыдущего доказательства. Тогда $\forall A \in Z_n(C) \det(A) \not\vdots\, p \Rightarrow \det(A) \notin pR_p$ и $A \in \Gamma'_n(R_p)$

(При отождествлении $\mathbb{Z}$ с R_p с помощью π). Значит $\Gamma(Z_n(C)) \subset \Gamma'_n(R_p)$ и $\chi(\Gamma(Z_n(C))) \leq \chi(\Gamma'_n(R_p)) < \infty$, то есть $\chi(\Gamma(Z_n(C)))$ — конечно. $\blacksquare$

Далее введем несколько понятий касающихся поверхности *Зарисского – Римана.*

Определение 2.18. *Пусть F — поле, тогда R — кольцо нормирования F, если для любого $x \in F \setminus \{0\}$, $x \in R$ или $\frac{1}{x} \in R$.*

Утверждение 2.19. *Кольцо нормирования R над F является локальным кольцом.*

Доказательство. Покажем это, проверив, что необратимые элементы образуют идеал. Пусть $x \in R$ – необратим, но xy обратим для некоторого $y \in R$, тогда $\frac{1}{xy} \in R \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{y}{xy} \in R$ противоречие. Пусть $x, y \in R$ – необратимы, а $x + y$ – обратимо. Заметим, что $\frac{x}{y} \in R$ или $\frac{y}{x} \in R$, без потери общности будем считать, что выполнено первое. $\frac{1}{x+y} \in R, \frac{x}{y} \in R \Rightarrow \frac{x}{y(x+y) \in R} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y} + \frac{x}{y(x+y)} \in R$ – противоречие. Получаем, что множество необратимых элементов – идеал, а значит R – локальное кольцо. $\blacksquare$

Тогда за F_R обозначим $R/\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал R.

Определение 2.20. *$Zar(F)$ — множество всех колец оценки F. $Zar(F)$ — поверхность Зарисского – Римана.*

На нем можно ввести топологию Зарисского. Для $T \subset F$ $U(T) = \{R \in Zar(F) \mid T \subset R\}$. $\{U(T) \mid T \subset F, |T| \leq \infty\}$ — семейство открытых множеств образуют топологию в $Zar(F)$.

Определение 2.21. *$S \subset Zar(F)$ — плотно, если для любого открытого множества U выполнено $S \cap U \neq \emptyset$.*

Далее сформулируем известную теорему, необходимую для последующих результатов, которую оставим без доказательства.

Теорема 2.22 (Теорема де Брёйна-Эрдёша). *Если n – натуральное число, и в графе каждый конечный подграф имеет хроматическое число не больше n, значит и весь граф имеет хроматическое число не большее n.*

Теорема 2.23. *Если $S \subset Zar(F)$ — плотно в топологии Зарисского, $\sup\limits_{R \in S} \chi(\Gamma_n(F_R)) < \infty$ и $\forall R \in S$ $charF_R \neq 2$, то $\chi(\Gamma_n(F)) \leq \sup\limits_{R \in S} \chi(\Gamma_n(F_R))$*

Доказательство. Пусть $\sup\limits_{R \in S} \chi(\Gamma_n(F_R)) = k$.

Предположим найдется конечный $G \subset \Gamma_n(F)$ с хроматическим числом, большим k. Пусть G образуют матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Рассмотрим конечное множество T состоящее из всех ненулевых чисел в матрицах A_i и матрицах A_i^{-1}, Так как S – плотно, существует $R \in S \cap U(T)$, значит R содержит все элементы T, следовательно $A_i \in GL_n(R)$. Откуда $G \subset \Gamma'_n(R)$. Значит $\chi(G) \leq \chi(\Gamma'_n(R))$, но по лемме 2.15 $\chi(\Gamma'_n(R)) \leq \chi(\Gamma_n(F_R))$. Тогда $\chi(\Gamma_n(F_R)) > k$, противоречит тому, что $\sup\limits_{R \in S} \chi(\Gamma_n(F_R)) = k$.

Следовательно любой конечный подграф $\Gamma_n(F))$ имеет хроматическое число не большее k, тогда по теореме 2.22, $\chi(\Gamma_n(F)) \leq k$ $\blacksquare$

Следствие 2.24. *Если* $|F| = \infty$, $charF \neq 2$, $\chi(\Gamma_n(F)) < \infty$, *то* $\chi(\Gamma_n(F)) = \chi(\Gamma_n(F(x)))$.

Доказательство. $F \subset F(x)$, откуда $\chi(\Gamma_n(F)) \leq \chi(\Gamma_n(F(x)))$. Покажем неравенство в обратную сторону.
Для любого $a \in F$, обозначим за R_a локализацию $F[x]$ по идеалу $(x-a)F[x]$, то есть дроби $\dfrac{f(x)}{g(x)}, g(a) \neq 0$, тогда R_a — кольцо нормирования $F(x)$. У R_a есть максимальный идеал $(x-a)R_a$, а $R_a/((x-a)R_a) \cong F$.
Докажем, что $S = \{R_a\}_{a\in F}$ — плотно в $Zar(F(x))$. Пусть U — открытое множество, значит существует конечное $T \subset F(x)$, такое, что $U(T) \subset U$. Пусть $T = \left\{\dfrac{f_1(x)}{g_1(x)}, \dfrac{f_2(x)}{g_2(x)}, \dots, \dfrac{f_k(x)}{g_k(x)}\right\}$.
Так как F – бесконечно, то найдется a, такое что $g_i(a) \neq 0$, тогда $T \subset R_a \Rightarrow R_a \in U$.
Осталось применить теорему 2.23:
$F(x)_{R_a} \cong F \Rightarrow \chi(\Gamma_n(F(x))) \leq \sup\limits_{a\in F} \chi(\Gamma_n(F(x)_{R_a})) = \chi(\Gamma_n(F))$ ∎

Следствие 2.25. *Если* $p_1, p_2, \dots$ — *бесконечная последовательность различных нечетных простых чисел, то* $\chi(\Gamma_n(\mathbb{Q})) \leq \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \chi(\Gamma_n(\mathbb{Z}_{p_i}))$

Доказательство. Рассуждение аналогично доказательству следствия 2.24.
Рассмотрим локализацию $\mathbb{Z}$ по идеалу $p_i\mathbb{Z}$, обозначим ее за R_i. R_i — кольцо нормирования $\mathbb{Q}$, $R_i/\mathfrak{m} = R_i/(p_iR_i) \cong \mathbb{Z}_{p_i}$.
Докажем, что $S = \{R_i\}$ — плотно в $Zar(\mathbb{Q})$. Пусть U — открытое множество, значит существует конечное $T \subset \mathbb{Q}$, такое, что $U(T) \subset U$. Пусть $T = \left\{\dfrac{a_1}{b_1}, \dfrac{a_2}{b_2}, \dots \dfrac{a_k}{b_k}\right\}$. Так как количество простых бесконечно, то найдется p_ℓ, такое что все g_i не делятся на p_ℓ, тогда $T \subset R_\ell \Rightarrow R_\ell \in U$.
Осталось применить теорему 2.23: $\mathbb{Q}_{R_i} \cong \mathbb{Z}_{p_i} \Rightarrow \chi(\Gamma_n(\mathbb{Q}) \leq \sup\limits_{i\in\mathbb{N}} \chi(\Gamma_n(\mathbb{Z}_{p_i}))$ ∎

3 Результаты статьи [3].

Данный раздел отражает результаты статьи [3]. Основным результатом является теорема 3.8, которая показывает, что хроматическое число регулярного графа матриц может быть бесконечным.

Для доказательства теоремы 3.8 понадобится использовать вариацию теоремы Хоффмана. Теорему можно найти в статье [5].

Теорема 3.1 (Вариация теоремы Хоффмана). *Пусть* $G = (V, E)$ – d*-регулярный граф с* n *вершинами,* $d = \lambda_1 \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ – *собственные значения матрицы смежности* G. $I, J \subset V$ – *два множества, между вершинами которых нет ребер. Тогда:*

$$\sqrt{|I||J|} \leq \frac{n|\lambda_2|}{d + |\lambda_2|}$$

Лемма 3.2. $|GL_2(\mathbb{F}_q)| = (q^2-1)(q^2-q)$

Доказательство. Рассмотрим сколькими способами можно получить невырожденную матрицу. Первую строку могут образовывать любые два числа, кроме пары $(0, 0)$, получается $q^2 - 1$ способов. Для каждой первой строки есть q строк линейно зависимых с ней (строки полученные домножением на некоторое число), все остальные $q^2 - q$ строк могут дополнять невырожденную матрицу.

Получаем, что получить невырожденную матрицу можно $(q^2-1)(q^2-q)$ способами, следовательно $|GL_2(\mathbb{F}_q)| = (q^2-1)(q^2-q)$ ∎

Следствие 3.3. *Для $q = p^m$, где p – нечетное простое верно:* $|GL_2(\mathbb{F}_q)| > q^4/2$

Доказательство. $|GL_2(\mathbb{F}_q)| = (q^2-1)(q^2-q) = q^4-q^3-q^2+q > q^4-q^3-\dfrac{q^3}{2} \geq q^4-\dfrac{q^4}{2} = \dfrac{q^4}{2}$, так как $q \geq 3$. ■

Напомним, что $Z(M_n(\mathbb{F}))$ – множество вырожденных матриц $n \times n$ над полем $\mathbb{F}$.

Лемма 3.4. $|Z(M_2(\mathbb{F}_q))| < 2q^3$

Доказательство. $|Z(M_2(\mathbb{F}_q))| = |M_2(\mathbb{F}_q)| - |GL_2(\mathbb{F}_q)| = q^3+q^2-q < 2q^3$ ■

Лемма 3.5. *Пусть граф $G = (V, E)$, с конечным числом вершин, тогда:* $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq |V|$

Доказательство. Рассмотрим корректную раскраску графа в $\chi(G)$ цветов. Вершины одного цвета попарно не соединены, значит они образуют независимое множество. Значит вершин, покрашеных в один цвет не более $\alpha(G)$, то есть суммарное количество вершин не более $\chi(G) \cdot \alpha(G)$. Откуда получаем требуемое $|V| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$ ■

Теперь перейдем к содержательной части доказательства. Далее будет приведено доказательство основной теоремы, из которой получится ключевой результат.

Теорема 3.6. *Пусть $q = p^m$, где p — нечетное простое, а m — натуральное. Тогда:*

$$\alpha(\Gamma_2(\mathbb{F}_q)) < 2q^3$$

Доказательство. Рассмотрим максимальное независимое множество I ($|I| = \alpha(\Gamma_2(\mathbb{F}_q))$). Докажем, что $|I| < 2q^3$.

Для этого рассмотрим граф G, вершинами которого будут матрицы $M_2(\mathbb{F}_q)$, а ребром соединим две различные матрицы A, B, если $\det(A-B) = 0$. (Такой граф называется графом *Кэли* для группы квадратных матриц по сложению порожденный множеством $Z(M_2(\mathbb{F}_q)) \setminus \{0\}$.)

Множество соседей матрицы A — $\{A - X | X \in Z(M_2(\mathbb{F}_q)) \setminus \{0\}\}$, значит степень каждой вершины равна $|Z(M_2(\mathbb{F}_q)) \setminus \{0\}| = q^3+q^2-q-1$, то есть граф Кэли является d-регулярным.

Рассмотрим два множества этого графа $I, J = -I$, их вершины попарно не соединены ребрами (Пусть $A \in I$ соединено с $B \in J$, значит $\det(A-B) = 0$, но $(-B) \in I$, а I – независимое множество $\Gamma_2(\mathbb{F}_q)$. Противоречие.) Тогда для множеств I, J можно применить теорему 3.1: $\sqrt{|I| \cdot |J|} \leq \dfrac{n|\lambda_2|}{d+|\lambda_2|}$, а так как $|J| = |I|$, имеем:

$$|I| \leq \frac{q^4|\lambda_2|}{d+|\lambda_2|} \leq \frac{q^4|\lambda_2|}{q^3+q^2-q-1} < \frac{q^4|\lambda_2|}{q^3+q/2} \tag{1}$$

Теперь оценим $|\lambda_2|$.

Представим $\mathbb{F}_q$ как m-мерное векторное пространство над $\mathbb{F}_p$. Пусть $v_1, v_2, \ldots v_m$ – базис. Тогда любой вектор $x \in \mathbb{F}_q$ можно единственным образом представить как $x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_mv_n$, где $x_i \in \mathbb{F}_p$. Введем скалярное произведение $x, y \in \mathbb{F}_q$ следующим образом: $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} x_iy_i$, где $x = x_1v_1 + \cdots + x_mv_m, y = y_1v_1 + \cdots + y_mv_m,\ x_i, y_i \in \mathbb{F}_p$.

Введем скалярное произведение матриц $X, Y \in M_2(\mathbb{F}_q)$: $\langle X, Y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{4}\langle x_iy_i\rangle$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$. Заметим, что $\langle X, Y+Z\rangle = \langle X, Y\rangle + \langle X, Z\rangle$. Этим фактом мы будем активно пользоваться.

Также введем некоторые обозначения: $V = M_2(\mathbb{F}_q)$, $v = |V|$, пронумеруем все матрицы множества V некоторым образом $V = \{X_1, X_2, \dots, X_v\}$. A – матрица смежности графа G (во введенной нумерации), ее размер $v \times v$. За $I[\mathcal{A}]$ будем обозначать индикатор утверждения $\mathcal{A}$. ($I[\mathcal{A}] = 1$, если $\mathcal{A}$ – истинно, и $I[\mathcal{A}] = 0$, иначе.) Также обозначим $\mu = e^{2\pi i/p}$.

Для начала найдем собственные векторы A. Зафиксируем матрицу $M \in M_2(\mathbb{F}_q)$, пусть $w_M \in \mathbb{C}^v$ – вектор с координатами: $(\mu^{\langle M, X_1\rangle}, \mu^{\langle M, X_2\rangle}, \dots, \mu^{\langle M, X_v\rangle})$.

Докажем, что w_M – собственный вектор A:

$$(Aw_M)_i = \sum_{j=1}^{v} A_{ij}(w_M)_j = \sum_{X_j \in V} I[\det(X_j - X_i) = 0, X_i \neq X_j]\mu^{\langle M, X_j\rangle} =$$
$$= \sum_{\substack{Z\in V\\ Z\neq 0}} I[\det(Z) = 0]\mu^{\langle M, Z+X_i\rangle} = \mu^{\langle M, X_i\rangle}(\sum_{\substack{Z\in V\\ Z\neq 0}} I[\det(Z) = 0]\mu^{\langle M, Z\rangle}) = (w_M)_i((\sum_{Z\in Z(M_2(\mathbb{F}_q))} \mu^{\langle M, Z\rangle}) - 1) \tag{2}$$

Откуда w_M действительно собственный вектор.

Докажем, что w_M для всех $M \in M_2(\mathbb{F}_q)$ образуют ортогональный базис, для этого достаточно проверить, что $\langle w_M, w_N\rangle = 0$. Действительно: $\langle w_M, w_N\rangle = \sum_{i=1}^{v} \mu^{\langle X_i, M-N\rangle}$. Пусть $M - N = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$. Так как $M \neq N$, найдется i, что $a_i \neq 0$, разложим a_i по базису (v_i), получим $a_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$, так как $a_i \neq 0$, значит найдется j, что $\alpha_j \neq 0$. (Теперь i, j – фиксированы.)

Разобьем множество V всех матриц на p штук: $V_t = \left\{X \mid X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, x_i = c_1 v_1 + \dots + c_m v_m, c_j = t\right\}$, $t \in \mathbb{F}_p$, то есть зафиксируем j-ю координату у i-го значения матрицы.

Тогда:

$\langle w_M, w_N\rangle = \sum_{t=0}^{p-1} \sum_{X \in V_t} \mu^{\langle X, N-M\rangle} = \sum_{t=0}^{p-1} \sum_{X \in V_t} \mu^{\alpha_j \cdot c_j + (\dots)} = \sum_{t=0}^{p-1} \mu^{\alpha_j \cdot t}(\sum_{X\in V} \mu^{\cdots}) = (\sum_{X\in V} \mu^{\cdots})(\sum_{t'=0}^{p-1} \mu^{t'}) =$
$= (\dots)(\sum_{t'=0}^{p-1} e^{2\pi i(t'/p)}) = 0$

Таким образом собственные векторы w_M образуют базис (их количество в точности равно $|V|$). Таким образом собственные числа им соответствующие будут всеми собственными числами матрицы A.

Из соотношения (2) $(Aw_M)_i = (w_M)_i((\sum_{Z\in Z(M_2(\mathbb{F}_q))} \mu^{\langle M, Z\rangle}) - 1)$, получаем, что

$\lambda_M = (\sum_{Z\in Z(M_2(\mathbb{F}_q))} \mu^{\langle M, Z\rangle}) - 1$.

Для $M = 0$ получим значение $((\sum_{Z\in Z(M_2(\mathbb{F}_q))} 1) - 1) = q^3 + q^2 - q - 1 = d$, это значение соответствует максимальной лямбде.

Для $M \neq 0$, Пусть $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Так как $M \neq 0$, значит хотя бы одно из значений x, y, z, t не равно нулю. Без потери общности будем считать, что $t \neq 0$.

Можно разбить все вырожденные матрицы на два множества $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_q\right\}, V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ ua & ub \end{pmatrix} \mid a, b, u \in \mathbb{F}_q, (a, b) \neq (0, 0)\right\}$

$\lambda_M = -1 + \sum_{Z\in V_1} \mu^{\langle M, Z\rangle} + \sum_{Z\in V_2} \mu^{\langle M, Z\rangle} = -1 + \sum_{a,b\in\mathbb{F}_q} \mu^{\langle z,a\rangle + \langle t,b\rangle} + \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_q\\ (a,b)\neq(0,0)}} \sum_{u\in\mathbb{F}_q} \mu^{\langle x,a\rangle + \langle y,b\rangle + \langle z,ua\rangle + \langle t,ub\rangle}$

Модуль слагаемого $\sum\limits_{a,b\in\mathbb{F}_q}\mu^{\langle z,a\rangle+\langle t,b\rangle}$ можно оценить сверху q^2 (так как $|\mu^x|=1$ для $x\in\mathbb{R}$, а в сумме q^2 слагаемых).

Зафиксируем a,b и поймем, чему равно $\sum_{u\in\mathbb{F}_q}\mu^{\langle z,ua\rangle+\langle t,ub\rangle}$. Обозначим эту сумму как $S(a,b)$.

Пусть для данных a,b существует $u'\in\mathbb{F}_q$, такой что $\langle z,u'a\rangle+\langle t,u'b\rangle=c\neq 0$. Заметим, что $\{u+r\cdot u'|u\in\mathbb{F}_q\}=\mathbb{F}_q$, для $r\in\mathbb{F}_p$, откуда $pS(a,b)=\sum\limits_{u\in\mathbb{F}_q}\sum\limits_{r\in\mathbb{F}_p}\mu^{\langle z,ua+ru'a\rangle+\langle t,ub+ru'b\rangle}=$

$=\sum\limits_{u\in\mathbb{F}_q}\mu^{\langle z,ua\rangle+\langle t,ub\rangle}(\sum\limits_{r\in\mathbb{F}_p}\mu^{r(\langle z,u'a\rangle+\langle t,u'b\rangle)})=(\sum\limits_{u\in\mathbb{F}_q}\mu^{\cdots})(\sum\limits_{r\in\mathbb{F}_p}\mu^{rc})=0$. Получаем $S(a,b)=0$.

Если же для всех $u'\in\mathbb{F}_q$ $\langle z,u'a\rangle+\langle t,u'b\rangle=0$, то $S(a,b)=\sum\limits_{u\in\mathbb{F}_q}\mu^0=q$

Рассмотрим $H=\{(a,b)\mid\forall u\in\mathbb{F}_q\langle z,ua\rangle+\langle t,ub\rangle=0,(a,b)\neq(0,0)\}$, тогда

$$\left|\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_q\\(a,b)\neq(0,0)}}\sum_{u\in\mathbb{F}_q}\mu^{\langle x,a\rangle+\langle y,b\rangle+\langle z,ua\rangle+\langle t,ub\rangle}\right|=\left|\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_q\\(a,b)\neq(0,0)}}\mu^{\langle x,a\rangle+\langle y,b\rangle}S(a,b)\right|\leq\sum_{(a,b)\in H}|\mu^{\cdots}|q=q|H|$$

Докажем, что в H не может быть две пары (a,b_1) и (a,b_2) для разных b_1,b_2. Пусть для всех u $\langle z,ua\rangle+\langle t,ub_1\rangle=\langle z,ua\rangle+\langle t,ub_2\rangle=0$, тогда $\langle t,ub_1\rangle-\langle t,ub_2\rangle=0$, то есть $\langle t,u(b_1-b_2)\rangle=0$. Так как $(b_1-b_2)\neq 0$, значит $\{u(b_1-b_2)\mid u\in\mathbb{F}_q\}=\mathbb{F}_q$. Также имеем $t\neq 0$. Значит найдется вектор $s\in\mathbb{F}_q$, такой что $\langle t,s\rangle\neq 0$. Значит $\langle t,u(b_1-b_2)\rangle$ для всех u не может быть равно 0. Противоречие.

Значит для каждого $a\in\mathbb{F}_q$ может быть не более одного $b\in\mathbb{F}_q$, такого, что $(a,b)\in H$. Отсюда следует, что $|H|\leq q$.

Таким образом:

$$|\lambda_M|=\left|-1+\sum_{a,b\in\mathbb{F}_q}\mu^{\langle z,a\rangle+\langle t,b\rangle}+\sum_{\substack{a,b\in\mathbb{F}_q\\(a,b)\neq(0,0)}}\sum_{u\in\mathbb{F}_q}\mu^{\langle x,a\rangle+\langle y,b\rangle+\langle z,ua\rangle+\langle t,ub\rangle}\right|\leq 1+q^2+q|H|\leq 2q^2+1.$$

Значит все $|\lambda_i|$ кроме λ_1 не превосходят $2q^2+1$, и $|\lambda_2|\leq(2q^2+1)$.

Подставляем в неравенство (1), получаем:

$|I|<\dfrac{q^4(2q^2+1)}{q^3+q/2}=2q^3$. А значит и $\alpha(\Gamma_n(\mathbb{F}_q))<2q^3$. ∎

Теорема 3.7. *Пусть $q=p^m$, где p — нечетное простое, а m — натуральное и $n\geq 2$. Тогда:*

$$\chi(\Gamma_n(\mathbb{F}_q))>(q/4)^{\lfloor n/2\rfloor}$$

Доказательство. Рассмотрим подмножество $V\subset GL_n(\mathbb{F}_q)$ состоящее из блочно-диагональных матриц $M=\begin{pmatrix}M_1&0&\dots&0\\0&M_2&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&M_{\lceil n/2\rceil}\end{pmatrix}$. Матрицы M_i для $i\in\{1,2,\dots,\lfloor n/2\rfloor\}$ принадлежат $GL_2(\mathbb{F}_q)$. В случае если n – нечетное, то последняя матрица $M_{\lceil n/2\rceil}=1$. За $M[i]$ обозначим i-ю блочную подматрицу M, $M[i]=M_i$.

Чтобы получить M, мы должны выбрать $M_1,M_2,\dots M_{\lfloor n/2\rfloor}$, каждую матрицу можно выбрать $|GL_2(\mathbb{F}_q)|$ способами. Откуда $|V|=|GL_2(\mathbb{F}_q)|^{\lfloor n/2\rfloor}>(q^4/2)^{\lfloor n/2\rfloor}$ по лемме 3.3.

Пусть G – подграф $\Gamma_n(\mathbb{F}_q)$, индуцированный множеством $|V|$.

Рассмотрим максимальное независимое множество $I\subset V$. Пусть $I[i]=\{M[i]\mid M\in I\}$ для $i\in\{1,2,\dots,\lfloor n/2\rfloor\}$. Заметим, что $I[i]$ – независимое множество в $\Gamma_2(\mathbb{F}_q)$. Если для каких то $M,N\in I$, $M[i],N[i]$ соединены ребром, тогда $\det(M[i]+N[i])=0$, значит на блочной диагонали матрицы $N+M$ будет вырожденная подматрица, откуда $\det(M+N)=0$. Но M,N лежат в независимом множестве, следовательно $\det(M+N)\neq 0$.

$I[i]\leq\alpha(\Gamma_2(\mathbb{F}_q))<2q^3$ по теореме 3.6.

Размер I не превосходит $\prod\limits_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} |I[i]|$. Применив предыдущее утверждение получаем, что $|I| < (2q^3)^{\lfloor n/2 \rfloor}$. То есть $\alpha(\Gamma_n(\mathbb{F}_q)) < (2q^3)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Теперь применим лемму 3.5: $\chi(G) \geq \dfrac{|V|}{\alpha(G)} > \dfrac{(q^4/2)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{(2q^3)^{\lfloor n/2 \rfloor}} = (q/4)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ ■

Теорема 3.8. *Пусть p – нечетное простое и $n \geq 2$. Тогда:*

$$\chi(\Gamma_n(\mathbb{F}_p^{alg})) = \infty,$$

где $\mathbb{F}_p^{alg}$ – алгебраически замкнутое расширение поля F_p.

Доказательство. Предположим, $\chi(\Gamma_n(\mathbb{F}_p^{alg}))$ конечно и равно k. Тогда найдем m, такое, что $(p^m/4)^{\lfloor n/2 \rfloor} > k$. Как известно, в $\mathbb{F}_p^{alg}$ существует подполе размера p^m. Значит граф $\Gamma_n(\mathbb{F}_{q^m})$ вложен в граф $\Gamma_n(\mathbb{F}_p^{alg})$. Откуда характеристика второго графа не меньше характеристики первого. Тогда $\chi(\Gamma_n(\mathbb{F}_p^{alg})) \geq \chi(\Gamma_n(\mathbb{F}_{p^m})) > (p^m/4)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ по теореме 3.7, а $(p^m/4)^{\lfloor n/2 \rfloor} > k$, в связи с выбором m. Но $\chi(\Gamma_n(\mathbb{F}_p^{alg})) = k$, противоречие. ■

4 Многодольные подграфы $\Gamma_2(\mathbb{Q})$

В данном разделе будет исследован вопрос: какие полные многодольные подграфы вложены в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$. Результат сформулирован в теореме 4.7.

Лемма 4.1. $K(\infty, \infty, \infty, \infty) \subset \Gamma_2(\mathbb{Q})$.

Доказательство. Положим $A_j^i = \left\{ \begin{pmatrix} i & a \\ 0 & j \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$.
Тогда $A_1^1, A_{-1}^1, A_1^{-1}, A_{-1}^{-1}$ бесконечные подмножества $GL_2(\mathbb{Q})$, в каждом множестве любые две матрицы не соединены ребром в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$. При этом любые две матрицы из разных множеств будут соединены, потому что у их суммы на диагонали появится 0. Значит подграф из матриц $A_1^1 \cup A_{-1}^1 \cup A_1^{-1} \cup A_{-1}^{-1}$ является $K(\infty, \infty, \infty, \infty)$. ■

Лемма 4.2. $K(1, 1, 1, 1, 1, 1) \not\subseteq \Gamma_2(\mathbb{Q})$

Доказательство. Известно, что $\omega(\Gamma_2(\mathbb{Q})) = 5$ ([1, Теорема 2]), значит не существует 6 матриц, попарно соединенных ребрами, соответственно, $K(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ не вложен в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$. ■

Лемма 4.3. *Если матрицы $A_1, A_2, A_3, A_4, X_1, X_2$ образуют $K(1, 1, 1, 1, 2)$ в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$, так что X_1 и X_2 в одной доле, а остальные матрицы в разных долях, то:*

- $\det X_1 \neq \det X_2$
- $\det A_1 + \det A_2 + \det A_3 + \det A_4 + \det X_1 + \det X_2 = 0$.

Доказательство. Пусть многочлен $F_A(X) = \det(A + X)$. Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, то

$$F_A(x, y, z, t) = xt - yz + dx - cy - bz + at + ad - bc. \tag{3}$$

Рассмотрим многочлены $F_{A_1}, F_{A_2}, \ldots, F_{X_1}, F_{X_2}$. Они принадлежат пространству $\mathbb{Q}_{\leq 2}[x, y, z, t]$, более того, нелинейная часть этих многочелнов составляет слагаемое $xt - yz$, поэтому эти многочлены лежат в пространстве $\langle xt - yz, x, y, z, t, 1\rangle$, размерность которого равна 6. Тогда 7 многочленов $F_{A_1}, F_{A_2}, F_{A_3}, F_{A_4}, F_{X_1}, F_{X_2}, \det(X)$ линейно зависимы. Значит найдутся нетривиальные коэффициенты $a_1, a_2, a_3, a_4, b, x_1, x_2$(не все равные нулю), что:

$$a_1F_{A_1}(X) + a_2F_{A_2}(X) + a_3F_{A_3}(X) + a_4F_{A_4}(X) + b\det(X) + x_1F_{X_1}(X) + x_2F_{X_2}(X) \equiv 0 \quad (4)$$

Подставим в это равенство многочленов матрицу A_i. Так как A_i соединено с A_j и с X_j, то $F_{A_j}(A_i) = 0$ и $F_{X_j}(A_i) = 0$. Следовательно получим $a_iF_{A_i}(A_i) + b\det(A_i) = 0 \Rightarrow$ $(4a_i + b)\det(A_i) = 0 \Rightarrow b = -4a_i$ и $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Тогда посмотрим на коэффициент при слагаемом $xt - yz$ в равенстве (4), с одной стороны он равен $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b + x_1 + x_2 = 4a_1 + b + x_1 + x_2 = x_1 + x_2$, с другой стороны это тождественно равный нулю многочлен, поэтому $x_1 + x_2 = 0$, значит $x_2 = -x_1$

Предположим, что $b = 0$. Тогда $a_i = 0 \Rightarrow x_1 \neq 0$ и $x_1F_{X_1} - x_1F_{X_2} = 0 \Rightarrow F_{X_1} = F_{X_2}$. Из (3) следует, что коэффициенты при x, y, z и t, являющиеся элементами матриц X_1 и X_2, совпадают. Значит сами матрицы X_1 и X_2 совпадают, но они различны — противоречие. Откуда $b \neq 0$, тогда $a_i \neq 0$, и можно поделить равенство на a_1, получим:

$$F_{A_1} + F_{A_2} + F_{A_3} + F_{A_4} - 4\det + cF_{X_1} - cF_{X_2} \equiv 0 \quad (5)$$

Теперь подставим в это равенство X_1. X_1 и A_i соединены ребром, откуда $F_{A_i}(X_1) = 0$. Получим: $-4\det(X_1) + 4c\det(X_1) - c\det(X_1 + X_2) = 0$, также подставим X_2, аналогично получим $-4\det(X_2) + c\det(X_1 + X_2) - 4c\det(X_2) = 0$. Сложим два полученных выражения: $-4(\det(X_1) + \det(X_2)) + 4c(\det(X_1) - \det(X_2)) = 0$. Выходит $c(\det(X_1) - \det(X_2)) = \det(X_1) + \det(X_2)$. Если $\det(X_1) - \det(X_2) = 0$, то $\det(X_1) + \det(X_2) = 0$, значит $\det(X_1) = \det(X_2) = 0$, чего быть не могло. Откуда получаем свойство $\det(X_1) \neq \det(X_2)$, а также выражаем коэффициент $c = \dfrac{\det(X_1) + \det(X_2)}{\det(X_1) - \det(X_2)}$.
Теперь посмотрим на свободный член многочлена из равенства (5). Он равен: $\det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(A_4) + c(\det(X_1) - \det(X_2)) = \det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(A_4) + \det(X_1) + \det(X_2) = 0$. Таким образом, получили второе свойство. ■

Лемма 4.4. $K(1, 1, 1, 1, 3) \not\subseteq \Gamma_2(\mathbb{Q})$

Доказательство. Пусть нашлись матрицы из $GL_2(\mathbb{Q})$, образующие $K(1, 1, 1, 1, 3)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & X_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & X_2 \\ & & & & X_3 \end{array}$$

Если выбрать матрицы $A_1, A_2, A_3, A_4, X_1, X_2$, то по лемме 4.3 получаем, что $\det(X_1) \neq \det(X_2)$, а также сумма определителей этих матриц равна нулю.
Теперь выберем $A_1, A_2, A_3, A_4, X_1, X_3$: снова сумма определителей этих матриц равна нулю. Она отличается от предыдущей суммы заменой $\det(X_2)$ на $\det(X_3)$, но при этом имеет то же значение, следовательно $\det(X_2) = \det(X_3)$.
Осталось выбрать матрицы $A_1, A_2, A_3, A_4, X_2, X_3$, и также получить, что $\det(X_2) \neq \det(X_3)$, что приводит к общему противоречию. ■

Лемма 4.5. $K(1, 1, 1, 2, 2) \not\subseteq \Gamma_2(\mathbb{Q})$

Доказательство. Пусть нашлись матрицы, образующие 5-дольный подграф $K(1, 1, 1, 2, 2)$:

$$\begin{array}{ccccc} & & & X_1 & Y_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 & & \\ & & & X_2 & Y_2 \end{array}$$

Воспользуемся леммой 4.3: Если выбрать $A_1, A_2, A_3, Y_1, X_1, X_2$, получим, что $\det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(Y_1) + \det(X_1) + \det(X_2) = 0$.

Аналогично выбрав $A_1, A_2, A_3, Y_1, X_1, X_2$, получим, что $\det(A_1) + \det(A_2) + \det(A_3) + \det(Y_2) + \det(X_1) + \det(X_2) = 0$.

Следовательно $\det(Y_1) = \det(Y_2)$.

Осталось выбрать матрицы $A_1, A_2, A_3, X_1, Y_1, Y_2$ и получить, что $\det(Y_1) \neq \det(Y_2)$ — противоречие. ∎

Лемма 4.6. *$K(1,1,1,1,1) \subset \Gamma_2(\mathbb{Q})$ и $K(1,1,1,1,2) \subset \Gamma_2(\mathbb{Q})$.*

Доказательство. $K(1,1,1,1,1) \subset K(1,1,1,1,2)$, поэтому достаточно доказать для второго графа.

Предъявим пример такого подграфа:

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -13 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Можно убедиться непосредственно, что данные матрицы образуют $K(1,1,1,1,2)$. Более общая конструкция приведена в лемме 5.4. ∎

Замечание. Данный пример был найден с помощью программы. Ее можно найти в репозитории [6] (Программа `parts11112.cpp`). Программа сначала генерирует все невырожденные матрицы с небольшими дробями, по модулю не превосходящими 2, со знаменателем не больше 4. Далее перебираются всевозможные 4 матрицы, образующие клику и дополняются 5 и 6 матрицами (функция generate_clique_for_2x2). По лемме 4.4 таких матриц может быть всего 2, поэтому пытаться искать их перебором бессмысленно. Можно составить условия, что матрицы соединены с кликой ребрами и получить уравнения на коэффициенты. Далее упростить и решить систему с помощью метода Гаусса. В итоге получится квадратное уравнение от одной неизвестной (за исключением некоторых вырожденных случаев). Решая его, проверяем, что получено рациональное число и что матрицы получились невырожденными. Если все выполняется, программа выводит их и завершается.

Программа нашла матрицы со знаменателем 3, однако если умножить все числа на 3, то получится такой же подграф, при этом все коэффициенты будут целыми.

Благодаря леммам 4.1–4.6 можно однозначно определить, какие полные многодольные подграфы вложены в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$.

Теорема 4.7. *Полный k-дольный подграф G вложен в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$ тогда и только тогда, когда $k \leq 5$ и в случае $k = 5$ G изоморфен $K(1,1,1,1,1)$ или $K(1,1,1,1,2)$.*

Доказательство.

- Во-первых, любой граф, в котором не более 4 долей, вложен в $K(\infty,\infty,\infty,\infty)$, соответственно является подграфом $\Gamma_2(\mathbb{Q})$ (по лемме 4.1).

- Во-вторых, любой граф, в котором 6 и более долей, не вложен в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$, так как $K(1,1,1,1,1,1)$ не вложен (по лемме 4.2).

- И наконец, для 5-дольных графов, только $K(1,1,1,1,1)$ и $K(1,1,1,1,2)$ вложены в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$. Они вложены по лемме 4.6. Пусть $K(d_1,d_2,d_3,d_4,d_5) \subset \Gamma_2(\mathbb{Q})$. Тогда $d_i < 3$, иначе $K(1,1,1,1,3)$ вложен в него, а такого не может быть (по лемме 4.4), также если $d_i = d_j = 2$, то $K(1,1,1,2,2)$ вложен в него, чего быть тоже не может (по лемме 4.5). Следовательно не более одной доли содержат две вершины, из чего получаем, что и хотели: 5-дольный подграф либо $K(1,1,1,1,1)$, либо $K(1,1,1,1,2)$.

■

Следствие 4.8. *В графе $\Gamma_2(\mathbb{Q})$ клику из 4 матриц можно дополнить до максимальной либо* 0, *либо* 1, *либо* 2 *способами до максимальной.*

Оказывается, что каждый из случаев достигается.

Утверждение 4.9. *Существует клика размера* 4, *которая не достраивается до максимальной (размера 5) в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$, но достраиваются до $K(1,1,1,1,2)$ в $\Gamma_2(\mathbb{R})$.*

Доказательство. В качестве клики подойдут матрицы:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -7/4 \\ -1/2 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -7/4 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 7/4 \\ 3/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

С помощью программы был найден данный пример, и получено, что он достраивается до $K(1,1,1,1,2)$ в $\Gamma_2(\mathbb{R})$. Можно получить, что если $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ дополняет пример до клики, то $x = -\frac{47}{80} - \frac{3}{8}t, y = \frac{151}{80} - \frac{9}{8}t, z = -\frac{163}{160} + \frac{9}{16}t$, а для t должно быть выполнено: $\frac{33}{128}t^2 - \frac{1679}{640}t + \frac{11953}{12800} = 0$ и $\frac{33}{128}t^2 - \frac{1789}{640}t - \frac{24613}{12800} \neq 0$, существует два иррациональных решения, удовлетворяющих этим уравнениям: $t = \frac{1679}{330} \pm \frac{2\sqrt{151537}}{165}$. Откуда найдутся две матрицы из $GL_2(\mathbb{R}) \setminus GL_2(\mathbb{Q})$, дополняющие данную клику до максимальной.

Программа, которая нашла данный пример расположена в репозитории [6] (Программа `addition-in-R.cpp`). В ней перебирались 4 матрицы с маленькими коэффициентами в случайном порядке, и проверялось, имеет ли система уравнений на 5-ю матрицу иррациональное решение. После того, как программа нашла 4 матрицы, был выведен общий вид системы, и то какие получились уравнения на коэффициенты. ■

Утверждение 4.10. *Существует клика размера* 4, *которая достраивается до максимальной (размера 5) в $\Gamma_2(\mathbb{Q})$ единственным образом.*

Доказательство. В статье [1] был приведен пример максимальной клики:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

В этом примере для любых 4 матриц существует только одна матрица, с ними соединенная (оставшаяся матрица клики). Этот факт можно проверить непосредственно, зафиксировав 4 матрицы, и составить систему уравнений на неизвестную матрицу, с ними соединенную. Например, если оставить первые 4 матрицы, то система получится такой:

$$\begin{cases} xt - yz + x + t + 1 = 0 \\ xt - yz - y - z - 1 = 0 \\ xt - yz + y + z - 1 = 0 \\ xt - yz - 2x + y - z + 1 = 0 \\ xt - yz \neq 0 \end{cases}$$

У такой системы только одно решение $x = 0, y = -1, z = 1, t = -2$, получаем пятую матрицу клики. Аналогично можно проделать с любыми другими 4-я матрицами клики.

Из этого следует, что любые 4 матрицы клики (6) достраиваются до максимальной клики единственным образом.

Замечание. Для экономии времени и точности вычислений была написана программа, которая проверяет сколькими способами можно дополнить клику размера 4. Программа строила систему из 4 уравнений, решала ее, после чего проверяла, что последнее уравнение тоже выполнено (определитель не нулевой).

Код программы можно найти в репозитории [6] (Программа `clique-addition.cpp`). ∎

Пример из леммы 4.6 показывает, что существует клика размера 4 достраиваемая двумя способами до максимальной.

5 Эквивалентность подграфов

В регулярном графе матриц над полем $\mathbb{Q}$ стандартными будем называть изоморфизмы следующего вида:

- $$X \to UXV, \text{ где } U, V \in GL_n(\mathbb{Q}) \tag{7}$$
- $$X \to UX^TV, \text{ где } U, V \in GL_n(\mathbb{Q}) \tag{8}$$

Лемма 5.1. *Отображения (7), и (8) действительно являются автоморфизмами регулярного графа матриц.*

Доказательство. Во-первых, оба отображения являются биекциями $GL_n(\mathbb{Q})$ (они обратимы).

Во-вторых, рассмотрим любые две матрицы A, B. Под действием некоторого отображения (7) A переходит в $UAV = A'$, B переходит в $UBV = B'$.

$\det(A' + B') = \det(U(A + B)V) = \det(U)\det(A + B)\det(V)$, откуда $\det(A + B) = 0 \Leftrightarrow \det(A' + B') = 0$. Значит отображение сохраняет смежность вершин.

Аналогично с (8), (дополнительно используется тождество $\det(X^T) = \det(X)$). ∎

Определение 5.2. *Будем называть два множества A, B эквивалентными, если существует стандартный изоморфизм φ такой, что $\varphi(A) = B$.*

В действительности такое отношения является отношением эквивалентности. Тождественное отображение переводит A в A. ($X \to EXE$). Отображения обратимы, значит отношение симметрично. А также композиция двух отображений является отображением нужного вида (например композиция $X \to U_1X^TV_1$ и $X \to U_2XV_2$, это $X \to (U_1V_2^T)X^T(U_2^TV_1)$), откуда выполнена транзитивность.

Для того чтобы проверять два множества на эквивалентность, нужно перебирать для каждой матрицы первого множества ее образ при отображении и для полученных точек проверять, существуют ли подходящие U, V.

Так как этот процесс слишком громоздкий, его можно оптимизировать. Для этого была написана программа, проверяющая два множества матриц $GL_2(\mathbb{Q})$ на эквивалентность. Программу можно найти в репозитории [6] (Хедер `isomorphism.h`)

Пусть в одном множестве матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а во втором множестве матрицы $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Будем проверять существует ли отображение, переводящее $B \to A$.

Для начала программа перебирает перестановку p, какая матрица в какую будет переходить.

Пусть зафиксирована некоторая перестановка p, теперь необходимо проверить, существуют ли такие матрицы U, V, что $A_i = UB_{p_i}V$, пусть матрица $V = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, тогда можно n способами выразить матрицу U^{-1}: $U^{-1} = B_{p_i}V(A_i)^{-1}$. Выражаем каждый из 4 коэффициентов U^{-1} через x, y, z, t линейным образом (в программе эти выражения лежат в массиве U_coefficients). Так как матрица U одна, получаем, что все эти n выражений должны совпадать. Приравняем первое выражение ко всем остальным. Получим $4(n-1)$ уравнений на переменные x, y, z, t. Для конкретной перестановки p получили систему уравнений на x, y, z, t, которые должны быть выполнены. Более того x, y, z, t должны образовывать невырожденную матрицу V. Если эти два условия выполнены, то отображение найдется. Аналогичный процесс с транспозицией.

Далее в программе рассматриваются всевозможные системы на x, y, z, t (полученные выражением U^{-1}), они записаны в массиве $ways$. И проверяется, существует ли у системы ненулевое решение, которое образует невырожденную матрицу V. Если хотя бы для одной системы нашлось решение, то два множества эквивалентны, иначе нет.

В лемме 4.6 был предоставлен пример, полученный программой. Однако, он его можно обобщить до бесконечной параметрической серии примеров.

Определение 5.3. *Для $n, m \in \mathbb{Q}$ обозначим за $k(n,m)$ множество матриц*

$$\left\{ \begin{pmatrix} n & n \\ n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n & n \\ n & 2n-m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & n \\ -n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ n & -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ -2m-n & -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & 2m-n \\ -n & m \end{pmatrix} \right\}$$

Лемма 5.4. *Если $n \neq 0, m \neq 0, n \neq \pm m$, тогда $k(n,m)$ является $K(1,1,1,1,2)$ подграфом $\Gamma_2(\mathbb{Q})$*

Доказательство. Для начала докажем, что все матрицы различны и невырождены:

Так как $n \neq 0, m \neq 0 \Rightarrow n \neq -n, m \neq -m$. Значит матрица 1 не совпадает с 3, 4, 5, 6 матрицами, 2 также не совпадает с ними, 3 не совпадает с 4 и 5, 4 не совпадает 6. Так как $m \neq n \Rightarrow m \neq 2n - m$, то есть 1 не совпадает с 2. Остается проверить, что не совпадают 3, 6, а также 4, 5. Следует из неравенств: $n \neq 2m - n$ и $n \neq -2m - n$.

Для проверки невырожденности посчитаем определители:

$\det_1 = n(m-n), \det_2 = n(n-m), \det_3 = n(n-m), \det_4 = n(n+m)$,

$\det_5 = -n(n+m), \det_6 = n(m-n)$

Никакой из определителей не равен нулю в силу ограничений.

Теперь поймем, как матрицы связаны ребрами.

Есть матрицы с противоположными строками, а именно: 1 и 3, 1 и 4, 1 и 5, 1 и 6, 2 и 3, 2 и 4, 2 и 5, 2 и 6, 3 и 4, 3 и 5, 4 и 6. Они соединены ребрами

Сложим матрицы 1 и 2, получим $\begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}$ – вырождена, значит они соединены. Осталось проверить 3 и 6, а также 4 и 5.

Сумма 3 и 6 дает $\begin{pmatrix} -2n & -2n \\ 2m & 2m \end{pmatrix}$ – вырожденную матрицу. Сумма 4 и 5 дает $\begin{pmatrix} -2n & -2m \\ -2n & -2m \end{pmatrix}$ – вырожденную матрицу.

Получаем, что матрицы соединены друг с другом, за исключением 5 и 6, откуда это подграф $K(1,1,1,1,2)$ ∎

Определение 5.5. *Пусть $k'(n,m)$ – первые 5 матриц $k(n,m)$, то есть*

$$\left\{ \begin{pmatrix} n & n \\ n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n & n \\ n & 2n-m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & n \\ -n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ n & -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ -2m-n & -m \end{pmatrix} \right\}$$

Определение 5.6. *Пусть $k''(n,m)$ – матрицы $k(n,m)$ без пятой, то есть*

$$\left\{ \begin{pmatrix} n & n \\ n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n & n \\ n & 2n-m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & n \\ -n & m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & -n \\ n & -m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -n & 2m-n \\ -n & m \end{pmatrix} \right\}$$

$k'(n,m)$ и $k''(n,m)$ образуют клику для $n, m \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, n \neq \pm m$.

Программой было проверено, что для малых натуральных $n_1, m_1, n_2, m_2 (n_1 \neq m_1, n_2 \neq m_2)$, если $\dfrac{n_1}{m_1} \neq \dfrac{n_2}{m_2}$ и $\dfrac{n_1}{m_1} \neq \dfrac{m_2}{n_2}$, то максимальные клики $k'(n_1, m_1)$ и $k'(n_2, m_2)$ не эквивалентны. Откуда возникает гипотеза, что данная серия дает бесконечное множество неэквивалентных максимальных клик.

Программа расположена в репозитории [6] (Программа `clique_series.cpp`)

Теорема 5.7. *В $\Gamma_2(\mathbb{Q})$ существует бесконечное число попарно неэквивалентных максимальных клик. А именно $k'(n,1)$ для натурального $n > 1$.*

Доказательство.

Докажем, что $k'(n_1, 1)$ не эквивалентно $k'(n_2, 1)$, для $1 < n_1 < n_2$.

Пусть существует φ, переводящее матрицы $k'(n_1, 1)$ в матрицы $k'(n_2, 1)$, тогда существуют U, V, такие что $\varphi(X) = UXV$ или $\varphi(X) = UX^TV$, пусть $\det(U) = a, \det(V) = b, (a \neq 0, b \neq 0)$, тогда $\det(\varphi(X)) = ab \det X$

Вспомним, какие определители матриц $k'(n,1)$: $\det_1 = n(1-n), \det_2 = n(n-1), \det_3 = n(n-1), \det_4 = n(n+1), \det_5 = -n(n+1)$

Заметим, что φ переводит матрицы с разным определителем в матрицы с разным, а матрицы с одинаковым в матрицы с одинаковым. Значит матрицы 2 и 3 из $k'(n_1, 1)$ должны перейти во вторую и третью матрицы $k'(n_2, 1)$. Откуда $n_2(n_2 - 1) = an_1(n_1 - 1)b \Rightarrow n_2(1 - n_2) = an_1(1 - n_1)b$, откуда первая матрица $k'(n_1, 1)$ переходит в первую матрицу $k'(n_2, 1)$. Для четвертой матрицы остается два варианта, откуда имеем: $an_1(n_1 + 1)b = \pm n_2(n_2 + 1)$. Получаем, что с одной стороны $ab = \dfrac{n_2(n_2 - 1)}{n_1(n_1 - 1)}$, с другой стороны: $ab = \pm\dfrac{n_2(n_2 + 1)}{n_1(n_1 + 1)}$. Так как $n_1 > 1$ и $n_2 > 1$ получаем, что $ab > 0 \Rightarrow ab = \dfrac{n_2(n_2 + 1)}{n_1(n_1 + 1)} \Rightarrow \dfrac{(n_2 + 1)}{(n_1 + 1)} = \dfrac{(n_2 - 1)}{(n_1 - 1)}$ то есть $n_2 n_1 - n_2 + n_1 - 1 = n_2 n_1 - n_1 + n_2 - 1 \Rightarrow n_1 - n_2 = n_2 - n_1$, но $n_2 > n_1$, следовательно выражения имеют разный знак. Противоречие – отображения φ не существует.

Значит любые две клики в последовательности не эквивалентны. Получили бесконечное множество неэквивалентных максимальных клик. ■

Пример из статьи Акбари (6) существенно отличается от полученной в этой работе серии клик $k'(n,m)$.

Утверждение 5.8. *Пример максимальной клики (6) не изоморфен кликами $k'(n,m)$ и $k''(n,m)$, для $n, m \neq 0, n \neq \pm m$.*

Доказательство. Дело в том, что $k'(n,m)$ и $k''(n,m)$ достраивается до 5-дольного подграфа $K(1,1,1,1,2)$, другими словами, найдется матрица, которая соединена еще с 4 матрицами этой клики. А в примере (6) для любых 4 матриц существует только одна матрица, с ними соединенная. Данный факт доказывался в утверждении 4.10. Из него следует, что клика (6) не изоморфна кликам $k'(n,m)$, $k''(n,m)$. ■

Список литературы

[1] S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari // The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite // https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379509003036

[2] S. Akbari, M. Aryapoor, M. Jamaali // Chromatic number and clique number of subgraphs of regular graph of matrix algebras // https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379511006537

[3] I. Tomon // On the chromatic number of regular graphs of matrix algebras // https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379515001378

[4] Ю. И. Мерзляков // Рациональные группы, 2-е изд., М., Наука, 1987

[5] D. Ellis, E. Friedgut, H. Pilpel // Intersecting families of permutations // https://www.ams.org/journals/jams/2011-24-03/S0894-0347-2011-00690-5/

[6] Репозиторий с программами // https://github.com/1van9/Subgraphs_of_regular_graph