Открытая осенняя студенческая олимпиада ФКН по математике 2024
OSAM Comp 2024

8 сентября 2024, 11:00 – 14:00 мск

I категория (I курс)

1. Докажите, что положительный корень уравнения
$$x(x+1)(x+2)\cdot\ldots\cdot(x+2024)=1$$
не превосходит $\dfrac{1}{2024!}$.

2. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_{2024}$ – это комплексные числа, стоящие в вершинах некоторого правильного 2024-угольника с центром в точке c на комплексной плоскости. Найдите все возможные значения выражения
$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{2024} p(z_i)}{p(s)}$$
где $p(x)$ – это некоторый квадратный трёхчлен $p(x)=x^2+ax+b$ с комплексными коэффициентами a и b.

3. Какое максимальное значение может принимать сумма косинусов (всех) внутренних двухгранных углов тетраэдра?

4. Вычислите сумму
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$$
и выразите в виде рационального числа.

5. Заданы множество $\mathcal{K}$ попарно непересекающихся кругов радиуса 1 на плоскости и вещественное число $c>0$. Известно, что для бесконечного количества натуральных чисел n окружность S_n с центром в начале координат и радиусом n содержит по крайней мере cn^2 кругов из $\mathcal{K}$. Докажите, что существует прямая, которая пересекает бесконечно много кругов из $\mathcal{K}$.