Открытая осенняя студенческая олимпиада ФКН по математике 2024
OSAM Comp 2024

8 сентября 2024, 11:00 – 14:00 мск

II категория (2+ курс)

1. Рассмотрим аддитивную группу $\mathbb{Z}^2$. Пусть H – это наименьшая подгруппа в $\mathbb{Z}^2$, содержащая $(3, 8)$, $(4, -1)$ и $(5, 4)$, и пусть H_{xy} – это наименьшая подгруппа, содержащая $(0, x)$ и $(1, y)$. Найдите такую пару (x, y), где $x > 0$, чтобы выполнялось $H = H_{xy}$.

2. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f^3(x)+2f(x)-x = 0$. Вычислите интеграл
$$\int_0^3 f(x)dx$$

3. Последовательность $\{a_n\}$ определена следующим образом: $a_1 = \frac{1}{2}$ и $a_{n+1} = a_n - a_n^2$ при $n \geq 1$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} nc_n = 1$.

4. В d-мерном линейном пространстве $\mathbb{R}^d$ даны два линейно-независимых набора $x_1, \ldots, x_d$ и $y_1, \ldots, y_d$ по d векторов в каждом. Оказалось, что для каждого индекса i от 1 до d включительно выполнено следующее свойство:
$$\chi(y_i, x_2, \ldots, x_d)\chi(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_1, y_{i+1}, \ldots, y_d) \geq 0,$$
где функция $\chi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ определена как $\chi(x_1, \ldots, x_d) = \operatorname{sgn}(\det(x_1, \ldots, x_d))$. Докажите, что тогда также выполняется $\chi\left(x_1, \ldots, x_d\right) \chi\left(y_1, \ldots, y_d\right) \geq 0$.

5. Пусть $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_n\}$ – такой набор выпуклых множеств в $\mathbb{R}^d$, что стандартный единичный шар $\mathcal{B}$ (с радиусом 1 и центром в начале координат) имеет общую точку с пересечением произвольных k множеств K_i из этого набора $\mathcal{K}$. Докажите, что найдётся такая точка $x \in \mathbb{R}^d$, что для произвольного множества $K_j \in \mathcal{K}$ выполнено
$$dist(x, K_i) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$