НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Шашки Фейнмана с поглощением: дополнительные главы

Дмитриев Михаил Дмитриевич

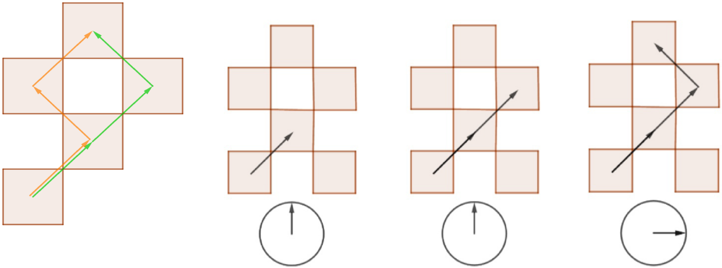
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

23 ноября 2024 г.

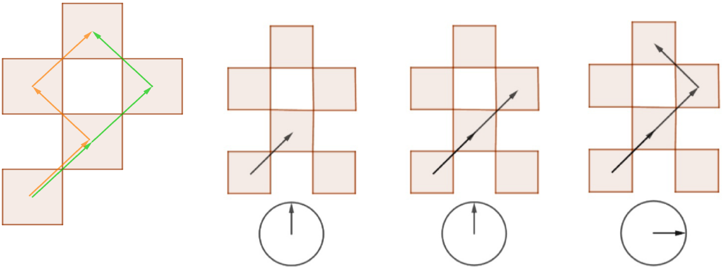
Неформальное определение

- Пусть шашка стоит на бесконечной клетчатой доске в клетке $(0, 0)$ и хочет добраться до (x, t).
- Рассмотрим все пути, состоящие из ходов вправо-вверх и влево-вверх, с первым ходом вправо-вверх.



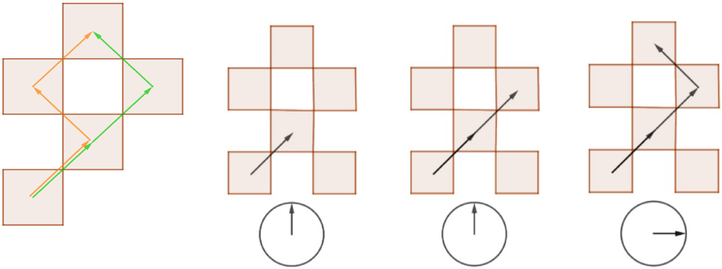
Неформальное определение

- Каждому пути сопоставим стрелку (вектор длины 1), вычисленную так: сначала она смотрит вверх, а при каждом повороте она поворачивается на 90°.



Неформальное определение

- $a(x,t)$ - это сумма стрелок по всем путям с коэффициентом $2^{(1-t)/2}$.
- $|a(x,t)|^2$ - это вероятность обнаружить электрон, испущенный из $(0,0)$, в точке (x,t).
- Пример $a(1,3) = (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$



Определение

- *Путь шашки* — это конечная последовательность таких целых точек плоскости, что вектор из каждой точки (кроме последней) к следующей равен либо $(1,1)$, либо $(-1,1)$.
- *Поворот* — это такая точка пути (не первая и не последняя), что вектор, соединяющий эту точку с предыдущей, ортогонален вектору, соединяющему её со следующей. $\mathrm{turns}(s)$ — общее число поворотов в s.
- *Стрелка* — это комплексное число

$$a(x,t) := 2^{(1-t)/2}\, i \sum_{s} (-i)^{\mathrm{turns}(s)},$$

где сумма берётся по всем путям s шашки из клетки $(0,0)$ в клетку (x,t), *начинающимся с хода вправо-вверх.*

Определение

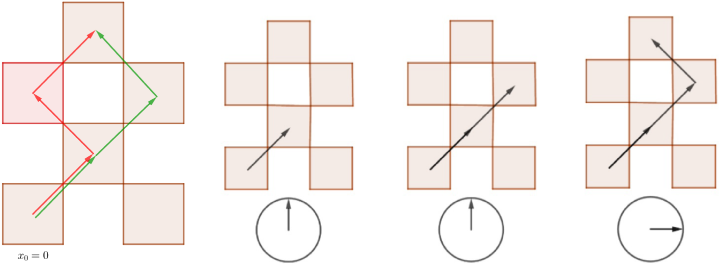
$$P(x,t) := |a(x,t)|^2.$$

$$a_1(x,t) = \mathrm{Re}(a(x,t))$$

$$a_2(x,t) = \mathrm{Im}(a(x,t))$$

Модель с поглощением

- Будем рассматривать все пути, состоящие из ходов вправо-вверх и влево-вверх, с первым ходом вправо-вверх и не проходящие через клетки вертикали $x = x_0$, кроме возможно первого и последнего хода.
- Аналогично определим $a_{1,2}(x, t \operatorname{bypass} x_0)$ и $P(x, t \operatorname{bypass} x_0)$



Модель с поглощением

- *Стрелка (с поглощением в точке x_0)* — это комплексное число

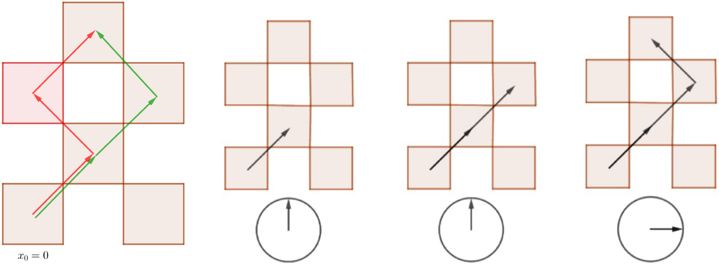
$$a(x, t \operatorname{bypass} x_0) := 2^{(1-t)/2}\, i \sum_s (-i)^{\operatorname{turns}(s)},$$

где сумма берется по всем путям s из точки $(0,0)$ в точку (x,t) *начинающимся с хода вправо-вверх и не проходящим по точкам прямой $x = x_0$, кроме быть может начальной и конечной точки.* $\operatorname{turns}(s)$ количество поворотов в пути s.

Модель с поглощением

Вернемся к примеру

- $a_1(x, t \,\mathrm{bypass}\, 0) = \frac{1}{2}$
- $a_2(x, t \,\mathrm{bypass}\, 0) = 0$



Первые значения функции $a(x, t \text{ bypass } 0)$

5		0		$\frac{1-2i}{4}$		$\frac{i}{4}$
4	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$\frac{1-i}{2\sqrt{2}}$		$\frac{i}{2\sqrt{2}}$	
3		$\frac{1}{2}$		$\frac{i}{2}$		
2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{i}{\sqrt{2}}$			
1		i				
$t = 0$						
	$x = 0$	1	2	3	4	5

Важные результаты о модели с поглощением

• 2001 — Амбаинис и соавторы: Вероятность поглощения в 0 равна $\frac{2}{\pi}$, а амплитуды пропорциональны числам Каталана.
• 2013 — Лиу и Петуланте: Найдены слабые пределы вероятности.

Связь с обычной моделью

Теорема (Дмитриев М.Д.)

Для любых $x, t \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $x, t > 0$ *и* $x + t$ *четно выполнено*

$$a_1(x, t \operatorname{bypass} 0) = a_2(-x, t) - a_2(-x + 2, t) + \delta_{x1}\delta_{t1}, \qquad (1)$$

$$a_2(x, t \operatorname{bypass} 0) = a_2(x, t) - a_2(-x + 2, t) + \delta_{x1}\delta_{t1}. \qquad (2)$$

Несколько следствий

Следствие (Амбаинис и др. 2001)

Для любого целого $t > 0$ выполнено

$$a(0, t \,\mathrm{bypass}\, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & t = 2; \\ \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{(k+1)2^{2k+3/2}}, & t = 4k+4, \text{ где } k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следствия

Следствие

Для любых $x, t \in \mathbb{Z}$ таких, что $x, t > 0$ и $x + t \neq 2$ четно выполнено

$$a_1(x, t \operatorname{bypass} 0) = \frac{2x}{t+x} a_1(x,t) - \frac{2}{t+x} a_2(2-x, t), \tag{3}$$

$$a_2(x, t \operatorname{bypass} 0) = \frac{2x-2}{t+x-2} a_2(x,t). \tag{4}$$

Доказательство.

Второе выражение следует из

$$(t-x)a_2(x,t) = (t+x-2)a_2(2-x,t)$$

Докажем первое

$$a_2(x+1, t+1 \operatorname{bypass} 0) = \frac{2x}{t+x} a_2(x+1, t+1),$$

$$a_2(x, t \operatorname{bypass} 0) - a_1(x, t \operatorname{bypass} 0) = \frac{2x}{t+x}(a_2(x,t) - a_1(x,t)).$$

$$(t+x)a_1(x, t \operatorname{bypass} 0) - 2xa_1(x,t) = (t+x)a_2(x, t \operatorname{bypass} 0) - 2xa_2(x,t) =$$

$$= (t-x)a_2(x,t) - (t+x)a_2(2-x,t) = -2a_2(2-x,t).$$

$\square$

Несколько следствий

- Асимптотика стрелки (волновой функции) в терминах функции Эйри

$$\mathrm{Ai}(\lambda) := \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{x^3}{3} + \lambda x\right) dx.$$

Следствие

Для любых $x, t \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $t/\sqrt{2} > x > 0$ *и* $x+t$ *нечетно (четно для* $a_2(x+1, t+1 \operatorname{bypass} 0)$*) выполнено*

$$a_1(x, t+1 \operatorname{bypass} 0) =$$

$$= (-1)^{(x-t+1)/2} \frac{2x}{t+x+1} \left(\frac{4\theta(x/t)}{1-2(x/t)^2} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{t} \right)^{1/3} \operatorname{Ai}\left(-\theta(x/t) t^{2/3} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t} \right),$$

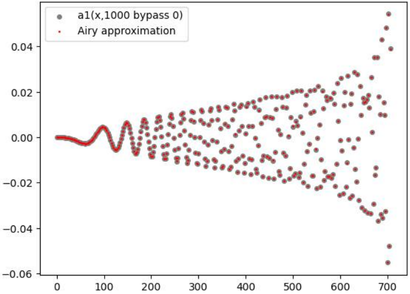
$$a_2(x+1, t+1 \operatorname{bypass} 0) =$$

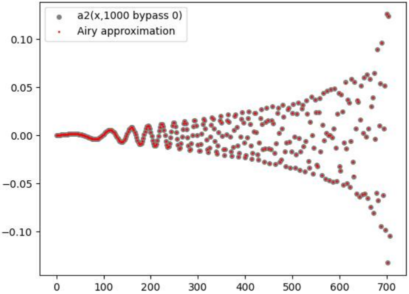
$$= (-1)^{(x-t)/2} \frac{2x}{\sqrt{t^2-x^2}} \left(\frac{4\theta(x/t)}{1-2(x/t)^2} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{t} \right)^{1/3} \operatorname{Ai}\left(-\theta(x/t) t^{2/3} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t} \right),$$

где

$$\theta(v) := \left(\frac{3}{2} \left(-|v| \arccos\left(\frac{|v|}{\sqrt{1-v^2}} \right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2-2v^2}} \right) \right) \right)^{2/3}.$$

Несколько следствий





Теорема

Для любых $x, t \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $x, t > 0$ *и* $x + t$ *четно выполнено*

$$a_1(x, t \,\mathrm{bypass}\, 0) = a_2(-x, t) - a_2(-x + 2, t) + \delta_{x1}\delta_{t1},$$
$$a_2(x, t \,\mathrm{bypass}\, 0) = a_2(x, t) - a_2(-x + 2, t) + \delta_{x1}\delta_{t1}.$$

Уравнение Дирака в модели с поглощением

Предложение (Уравнение Дирака)

Для любых $x, t, x_0 \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $t > 0$, $(1 - x_0)(x - x_0) > 0$, *и* $x + t$ *четно выполнено*

$$\sqrt{2}a_1(x-1, t+1 \,\mathrm{bypass}\, x_0) = a_2(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0) + a_1(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0),$$

$$\sqrt{2}a_2(x+1, t+1 \,\mathrm{bypass}\, x_0) = a_2(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0) - a_1(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0).$$

Симметрия поглощения

Предложение (Symmetry of absorption)

Для любых $t, x_0 \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $t > 0$, *а* $x_0 + t$ *четно верно, что*

1. *если* $x_0 < 0$, *то*
   $a_1(x_0, t \operatorname{bypass} x_0) = a_1(-x_0, t \operatorname{bypass} 0)$,
2. *если* $x_0 > 0$, *то*
   $a_2(x_0, t \operatorname{bypass} x_0) = a_2(x_0, t \operatorname{bypass} 0) = \frac{2x_0 - 2}{t + x_0 - 2} a_2(x_0, t)$.

Следствие

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(-2, t \text{ bypass } -2) = \frac{10}{\pi} - 3$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(-1, t \text{ bypass } -1) = \frac{4}{\pi} - 1$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(0, t \text{ bypass } 0) = \frac{2}{\pi}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(2, t \text{ bypass } 2) = \frac{2}{\pi}$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(3, t \text{ bypass } 3) = \frac{8}{\pi} - 2$$

Доказательство.

$$2a_1(0, t+2 \,\mathrm{bypass}\, 0) = \sqrt{2}a_1(1, t+1 \,\mathrm{bypass}\, 0) =$$

$$= a_1(2, t \,\mathrm{bypass}\, 0) + a_2(2, t \,\mathrm{bypass}\, 0) =$$

$$= a_1(2, t \,\mathrm{bypass}\, 0) - \frac{1}{\sqrt{2}}a_1(1, t-1 \,\mathrm{bypass}\, 0) =$$

$$= a_1(2, t \,\mathrm{bypass}\, 0) - a_1(0, t \,\mathrm{bypass}\, 0)$$

$$P(-2, t \,\mathrm{bypass}\, -2) = a_1(-2, t \,\mathrm{bypass}\, -2)^2 = a_1(2, t \,\mathrm{bypass}\, 0)^2 =$$

$$= (2a_1(0, t+2 \,\mathrm{bypass}\, 0) - a_1(0, t \,\mathrm{bypass}\, 0))^2 =$$

$$= 4a_1(0, t+2 \,\mathrm{bypass}\, 0)^2 + a_1(0, t \,\mathrm{bypass}\, 0)^2 =$$

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(-2, t \,\mathrm{bypass}\, -2) = 5\sum_{t=1}^{\infty} P(0, t \,\mathrm{bypass}\, 0) -$$

$$-4P(0, 4 \,\mathrm{bypass}\, 0) - 5P(0, 4 \,\mathrm{bypass}\, 0)$$

Симметрия поглощения

Предложение (Symmetry of absorption)

Для любых $t, x_0 \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $t > 0$, *а* $x_0 + t$ *четно верно, что*

1. *если* $x_0 < 0$, *то*
   $a_1(x_0, t \operatorname{bypass} x_0) = a_1(-x_0, t \operatorname{bypass} 0)$,
2. *если* $x_0 > 0$, *то*
   $a_2(x_0, t \operatorname{bypass} x_0) = a_2(x_0, t \operatorname{bypass} 0) = \frac{2x_0 - 2}{t + x_0 - 2} a_2(x_0, t)$.

Лемма

Для любых $t, x, x_0 \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $t > 0$, *а* $x + t$ *четно верно, что*

$$a_1(x, t \operatorname{bypass} x_0) = a_1(-x, t \operatorname{bypass} x_0 - x).$$

Лемма

Для любых $t, x, x_0 \in \mathbb{Z}$ *таких, что* $t > 0$, *а* $x + t$ *четно верно, что*

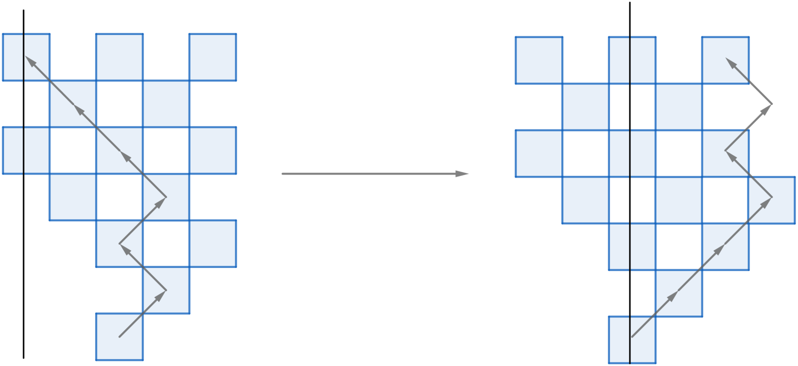
$$a_2(x, t \operatorname{bypass} x_0) = a_2(x, t \operatorname{bypass} x - x_0).$$

Доказательство

$$a_1(x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0) = a_1(-x, t \,\mathrm{bypass}\, x_0 - x).$$

- Отразим траекторию относительно $x = 0$, развернем стрелки и сдвинем, так чтобы начало было в точке $(0, 0)$ (т.е на вектор $(-x, t)$
- Длина траектории и количество поворотов не поменялось
- Конечная точка $(0, 0) \mapsto (0, 0) \mapsto (-x, t)$
- Граница поглощения $x_0 \mapsto x_0 \mapsto x_0 - x$

Доказательство

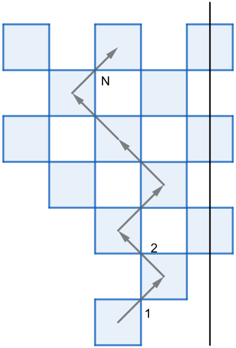


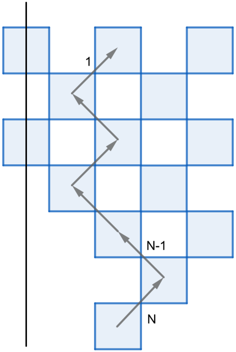
Доказательство

$$a_2(x, t \operatorname{bypass} x_0) = a_2(x, t \operatorname{bypass} x - x_0).$$

- Развернем траекторию на π, развернем стрелки и сдвинем на (x, t) .
- Длина траектории и количество поворотов не поменялось
- Конечная точка $(0, 0) \mapsto (0, 0) \mapsto (x, t)$
- Граница поглощения: $x_0 \mapsto x - x_0$:

Доказательство





- A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, One-dimensional quantum walks, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (2001), 37–49.
- R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum mechanics and path integrals, New York, McGraw-Hill, 1965.
- M. Dmitriev, Feynman Checkers with Absorption, Siberian Electronic Mathematical Reports, 2023, 20(2), 626-637
- C. Liu, N. Petulante, Weak limits for quantum walks on the half-line, International Journal of Quantum Information, 11.06(2013): 1350054.
- M. Skopenkov, A. Ustinov, Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory, Russian Math. Surveys 77:3(465) (2022), 73-160.