ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГАОУ ВО НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет компьютерных наук
Образовательная программа «Прикладная математика и информатика»

УДК 512.643

Отчет об исследовательском проекте на тему:

Тройки матриц с максимальным спектром

(промежуточный, этап 1)

Выполнил студент:

группы #БПМИ222, 2 курса Воротников Игорь Олегович

Принял руководитель проекта:

Максаев Артём Максимович
Доцент
Факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ

Соруководитель:

Промыслов Валентин Валерьевич
Старший преподаватель
Факультет компьтерных наук НИУ ВШЭ

Москва 2024

Содержание

Аннотация

Задачи Linear Preserver Problems (LPP) состоят в определении всех линеиных операторов, сохраняющих заданные функции или свойства на пространстве матриц. LPP имеет много приложении в различных областях математики и естественных наук. Первым результатом в этой теории считается результат Фробениуса, который получил описание линейных отображений матриц над полем комплексных чисел, сохраняющих определитель. Есть ряд далеко идущих обобщений теоремы Фробениуса, для получения которых нужно развивать базовые свойства алгебры квадратных матриц. Целью данного проекта является исследование одного из таких свойств. Тройку комплексных невырожденных квадратных $n \times n$ матриц A, B, C назовем тройкой с полным спектром, если существует такая невырожденная комплексная матрица X, что спектр каждой из матриц AX, BX, CX состоит из n различных собственных значений. Аналогичное определение можно дать для вещественных матриц или для наборов из большего числа матриц. Известно, что любая пара комплексных матриц является парой с полным спектром – необходимо решить аналогичный вопрос для троек матриц. А именно: доказать или опровергнуть, что всякая тройка (комплексных или вещественных матриц) является тройкой с максимальным спектром. В случае положительного ответа – рассмотреть возможные обобщения на произвольный конечный набор матриц. В случае отрицательного ответа – найти способ выяснения для конкретной тройки матриц, является ли она тройкой с максимальным спектром.

Ключевые слова

Теория матриц, Linear Preserver Problems, матричные базисы, спектры матриц

1 Введение

1.1 Описание предметной области

Исследование проводится в области матричной алгебры.

1.2 Постановка задачи

- Доказать или опровергнуть, что любой набор из трех комплексных (вещественных) матриц является полноспектровым

- В случае положительного ответа на вопрос выше рассмотреть возможные обобщения на произвольный конечный набор матриц. В случае отрицательного ответа найти способ выяснения для конкретной тройки матриц, является ли она тройкой с максимальным спектром

2 Обзор литературы

Рассмотрим линейные биективные отображения $T : M_n \to M_n$. Стандартным видом будем называть отображения двух типов: 1) $\forall A \in M_n$ верно, что $T(A) = PAQ$ для некоторых $P, Q \in M_n, \det(PQ) = 1$; 2) $\forall A \in M_n$ верно, что $T(A) = PA^TQ$ для некоторых $P, Q \in M_n, \det(PQ) = 1$.

Фробениус доказал [1] что все биективные линейные отображения имеют стандартный вид. Его работа дала начало целому классу задач LPP (Linear Preserver Problems). Расммотрение одной из таких задач для алгебраически замкнутых полей содержится в статье [2]. Основной её результат формулируется так, что следующие утверждения эквивалентны над алгебраически замкнутых полей $\mathbb{F}$, отображений $T_1, T_2 : M_n \to M_n$:

- $\forall A, B \in M_n, \lambda \in \mathbb{F} : A + \lambda B \in GL_n \Leftrightarrow T_1(A) + \lambda T_2(B) \in GL_n$

- $\forall A, B \in M_n, \lambda \in \mathbb{F} : A + \lambda B \in GL_n \Rightarrow T_1(A) + \lambda T_2(B) \in GL_n$ и $\exists D \in GL_n : T_2(D) \in GL_n$

- $T_1 = T_2$ и имеют стандартный вид

Задача же этой работы - решить подзадачу, появляющуюся при попытке доказать основное утверждение статьи [2] для поля $\mathbb{R}$, не являющегося алгебраически замкнутым.

3 Определения

Матрицу $A \in GL_n(\mathbb{F})$ будем называть **матрицей с максимальным спектром**, если $|spec_{\mathbb{F}}\ AX| = n$.

Будем называть набор матриц $A_1, \dots, A_m \in GL_n(\mathbb{F})$ **набором с полным спектром (или полноспектровым)**, если существует $X \in GL_n(\mathbb{F}): \ \forall i \in 1, \dots, m$ матрица $A_i X$ имеет максимальный спектр. Саму же матрицу X в таком случае будем называть **дополняющей**.

Будем называть базис в $M_n(\mathbb{F})$ **дополняющим базисом** для набора матриц $A_1, \dots, A_m \in GL_n(\mathbb{F})$, если каждый из элементов базиса является дополняющим к этому набору.

4 Доказательства

4.1 Лемма о переходе между наборами матриц

Пусть $A_1, A_2, \dots, A_m$ – набор матриц из $GL_n(\mathbb{F})$, $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда эквивалентно следующеее:

- $A_1, A_2, \dots, A_m$ - полноспектровой набор
- $PA_1Q, PA_2Q, \dots, PA_mQ$ - полноспектровой набор

Доказательство:

$\Rightarrow$ Пусть X – дополняющая матрица набора $\{A_i\}$. Заметим, что $Y = Q^{-1}XP^{-1}$ – дополняющая матрица к набору $\{PA_iQ\}$. Очевидно, $Y \in GL_n(\mathbb{F})$. Остается проверить, что $\forall i \in 1, \dots, m \quad |spec(PA_iQ)Y| = n$. $(PA_iQ)Y = PA_iXP^{-1}$ – матрица, сопряженная A_iX, и, следовательно, имеющая тот же спектр из n различных значений, доказано.

$\Leftarrow$ Доказательство аналогично прошлому. Пусть Y - дополняющая матрица набора $\{PA_iQ\}$. Заметим, что $X = QYP$ – дополняющая матрица к набору $\{A_i\}$. Очевидно, $X \in GL_n(\mathbb{F})$. Остается проверить, что $\forall i \in 1, \dots, m \quad |specA_iX| = n$. $A_iX = A_iQYP$ – матрица, сопряженная PA_iQY, и, следовательно, имеющая тот же спектр из n различных значений, доказано.

4.2 Лемма об общем не корне многочленов

Пусть $f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_k]$ – ненулевые многочлены от k переменных, где $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда $\exists y_1, \dots, y_k \in \mathbb{F} : f_1(y_1, \dots, y_k) \neq 0, \dots, f_m(y_1, \dots, y_k) \neq 0$.

Доказательство:

Докажем индукцией по k.

База: $k = 1$. Многочлены от одной переменной имеют лишь конечное число корней, а значит, существует такое значение, в котором ни один из конечного числа многочленов не зануляется.

Переход: Допустим, доказано для любого количества переменных $\leq k - 1$. Докажем для k. Рассмотрим все мономы всех f_i, содержащие x_k. Если таких нет, то на f_i можно смотреть как на многочлены от $k - 1$ переменной, и тогда по предположению индукции теорема уже доказана. Иначе для каждого многочлена сгруппируем все мономы, у которых совпадают степени при всех переменных, кроме x_k. Тогда f_i будет выглядеть как сумма мономов от $x_1, \dots, x_{k-1}$, умноженных на ненулевые многочлены от x_k. Таких многочленов от

x_k будет конечное количество, а значит, будет существовать такое $y_k \in \mathbb{F}$, что все они не будут зануляться в точке y_k. Посмотрим на $f_1(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k)$ - многочлены от $k-1$ переменнной. Мы специально подобрали y_k так, чтобы ни один из этих многочленов не стал тождественным 0, значит, по предположению индукции они имеют общий не корень, а значит, и начальные многочлены имеют общий не корень, переход индукции доказан.

4.3 Усиленная лемма об общем не корне многочленов

Пусть $f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{F}[x_1, \ldots, x_k]$ – ненулевые многочлены от k переменных, где $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда $\forall a_1 < b_1, \ldots, a_m < b_m \in \mathbb{R}\ \exists y_1 \in [a_1, b_1], \ldots, y_k \in [a_k, b_k]$: $f_1(y_1, \ldots, y_k) \neq 0, \ldots, f_m(y_1, \ldots, y_k) \neq 0$.

Доказательство:

Аналогично предыдущему, только здесь мы в переходе индукции пользуемся тем, что у любого ненулевого многочлена от одной переменной есть не корень не просто где-то, а на любом отрезке.

4.4 Теорема о полном спектре набора матриц в поле $\mathbb{C}$

Любой набор матриц $A_1, A_2, \ldots, A_m \in GL_n(\mathbb{C})$ является полноспектровым.

Доказательство:

Покажем, что существует такая матрица $X \in GL_n(\mathbb{C})$, что $\forall i \in 1, \ldots, m \quad |specA_iX| = n$. Так как в $GL_n(\mathbb{C})$ любая матрица всегда имеет n собственных значений, то единственное, что нам нужно нужно показать - что у A_iX не будет одинаковых собственных значений. Это равносильно тому, что у характеристических многочленов A_iX не будет кратных корней. Это же в свою очередь равносильно тому, что дискриминанты характеристических многочленов не равны 0.

Заметим, что посчитать дискриминант характеристического многочлена матрицы, где каждый коэффициент - многочлен от нескольких переменных (то есть дискриминант получится тоже многочленом от этих же переменных), а потом в получившийся дискриминант подставить конкретные значения переменных - то же самое, что и сначала подставить значения переменных, а потом посчитать дискриминант. Наглядно:

$$D(\chi(t, x_1, \ldots, x_k))|_{x_1=y_1, \ldots, x_k=y_k} = D(\chi(t, y_1, \ldots, y_k))$$

Это верно в силу того, что $\chi(t)$ – многочлен степени n, его старший коэффициент всегда 1. На дискриминант можно смотреть на некий многочлен от коэффициентов (которые в нашем случае - многочлены от $x_1, \ldots, x_k$). Так как степени многочленов с обеих сторон равны, операция взятия дискриминанта имеет для них одинаковый вид. А наше утверждение сводится к тому, что подставить точку можно в любой момент работы с многочленами, это верно.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix},$$

где каждый коэффициент - переменная. Тогда $\det X$ – ненулевой многочлен от $x_{11}, \ldots, x_{nn}$. $X \in GL_n(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \det X \neq 0$.

Каждый коэффициент в A_iX - многочлен от $x_{11}, \ldots, x_{nn}$, а характеристический многочлен - многочлен от нескольких переменных $\chi_{A_iX}(t, x_{11}, \ldots, x_{nn})$. Дискриминант характеристического многочлена в таком случае - многочлен $D_i(x_{11}, \ldots, x_{nn})$.

Так как $A_i \in GL_n(\mathbb{C})$, то при домножении справа на матрицу так же из $GL_n(\mathbb{C})$ можно получить любую матрицу из $GL_n(\mathbb{C})$, в том числе и матрицу, имеющую n различных собственных значений. Пусть A_iR имеет n собственных значений, тогда по утверждению выше $D_i(r_{11}, \ldots, r_{nn}) \neq 0$. Значит, D_i – не тождественный 0 для любого i. Посмотрим на набор многочленов $D_1, \ldots, D_m, \det X$. По лемме об общем не корне, существуют такие $y_{11}, \ldots, y_{nn} \in \mathbb{C}$, что $\forall i \in 1, \ldots, m \;\; D_i(y_{11}, \ldots, y_{nn}) \neq 0$, а также $\det X(y_{11}, \ldots, y_{nn})$, что и требовалось доказать.

4.5 Лемма 1

Пусть $g(t,c) = t^n - k_{n-1}(c)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n k_0(c)$, где $k_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – такие функции, что $\exists C_0 \in \mathbb{R} : \forall c > C_0 \;\; k_i(c) \in \mathbb{R}$, при $c \to +\infty$ $k_i \sim d_{n-i}c^{(n-1)+\ldots+i}$, где $d_i \in \mathbb{R}$. Пусть корни $t_1(c), \ldots, t_n(c)$ – корни $g(t,c)$, причем упорядоченные по модулю (для любого c наименьший по модулю корень $g(t,c)$ равен $t_n(c)$, наибольший - $t_1(c)$). Тогда верно, что $\exists M \in \mathbb{R} : \forall c > M \; \forall i \in 1, \ldots n \; t_i(c) \in \mathbb{R}$, кроме того при $c \to +\infty \;\; t_1(c) \sim d_1c^{n-1}, t_2(c) \sim \frac{d_2}{d_1}c^{n-2}, \ldots, t_n(c) \sim \frac{d_n}{d_{n-1}}$.

Доказательство:

Докажем по индукции по степени $g(t)$.

База: $g(t,c) = t - k_0(c)$, $t_1 = k_0(c) \sim d_1$, что и требовалось понять

Переход: Пусть для степени $n-1$ доказано, докажем для n. Выпишем теорему Виета для

$g(t)$:

$$\begin{aligned}
&k_{n-1} = t_1 + t_2 + \ldots + t_n \\
&k_{n-2} = t_1t_2 + t_1t_3 + \ldots + t_{n-1}t_n \\
&\ \vdots \\
&k_0 = t_1t_2 \ldots t_n
\end{aligned}$$

При $c \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
&d_1c^{n-1} \sim t_1 + t_2 + \ldots + t_n \\
&d_2c^{(n-1)+(n-2)} \sim t_1t_2 + t_1t_3 + \ldots + t_{n-1}t_n \\
&\ \vdots \\
&d_nc^{(n-1)+\ldots+0} \sim t_1t_2 \ldots t_n
\end{aligned}$$

Поймем, что $\exists C_1 \in \mathbb{R} : \forall c > C_1\ t_1(c) \in \mathbb{R}$, кроме того $t_1 \sim d_1c^{n-1}$ при $c \to +\infty$:
Заметим, что если (следует напрямую из теоремы Виета) изменить все k_i на $\frac{k_i}{(c^q)^{(n-i)}}$, то корни получившегося многочлена будут меньше ровно в c^q, чем корни $g(t)$. Воспользуемся этим и вместо исходного многочлена рассмотрим получившийся при $q = n-1$, обозначим его за $f(t)$, а его корни в соответствии с корнями $g(t)$ назовем $u_i(c)$.
$f(t) = t^n - \frac{k_{n-1}}{c^{n-1}}t^{n-1} + \frac{k_{n-1}}{(c^{n-1})^2}t^{n-2} + \ldots + \frac{k_0}{(c^{n-1})^n}$. Видно, что $f(t) \to t^n - d_1t^{n-1}$ покоэффициентно. По теореме о непрерывности корней для многочленов с комплексными коэффициентами получаем, что существует такое $C' : \forall c > C'\ |u_1(c) - d_1| < \frac{d_1}{2}, \forall i \in 2, \ldots n\ \ |u_i(c) - 0| < \frac{d_1}{2}$. Так при любом $c > C_0$ $f(t)$ – многочлен с вещественными коэффициентами, то у него для каждого не вещественного корня должен также существовать сопряженный ему, равный по модулю. Пусть $C_1 = \max(C_0, C')$. Заметим, что $\forall c > C_1\ u_1(c) \in \mathbb{R}$, так как у наибольшего по модулю корня нет ему сопряженного. По теореме о непрерывности корней также $u_1 \ \sim d_1 \Rightarrow t_1 \sim d_1c^{n-1}$.

Теперь, зная $t_1 \sim d_1c^{n-1}$, перепишем эквивалентности выше:

$$\begin{aligned}
&d_1c^{n-1} \sim t_1 + t_2 + \ldots + t_n \sim d_1c^{n-1} + t_2 + \ldots + t_n \\
&d_2c^{2n-3} \sim t_1t_2 + t_1t_3 + \ldots + t_{n-1}t_n \sim d_1c^{n-1}(t_2 + \ldots + t_n) + t_2t_3 + \ldots + t_{n-1}t_n \\
&\ \vdots \\
&d_nc^{(n-1)+\ldots+0} \sim t_1t_2 \ldots t_n \sim d_1c^{n-1}t_2 \ldots t_n
\end{aligned}$$

Обозначим за s_i сумму всех возможных произведений i различных корней из $t_2, \ldots, t_n$, тогда

$$\begin{aligned}
&d_1 c^{n-1} \sim d_1 c^{n-1} + s_1\\
&d_2 c^{2n-3} \sim d_1 c^{n-1} s_1 + s_2\\
&\quad\vdots\\
&d_n c^{(n-1)+\ldots+0} \sim d_1 c^{n-1} s_{n-1}
\end{aligned}$$

Докажем по индукции по индексу (начиная с $n-1$), что $s_i \sim \frac{d_{i+1}}{d_1} c^{(n-2)+\ldots+(n-1-i)}$.

База: $s_{n-1} \sim \frac{d_n}{d_1} c^{(n-2)+\ldots+0}$, это следует из последней эквивалентности.

Переход: Пусть доказано для s_{i+1}, докажем для s_i. Воспользуемся одной из эквивалентностей выше:

$$d_{i+1} c^{(n-1)+\ldots+(n-1-i)} \sim d_1 c^{n-1} s_i + s_{i+1} \sim d_1 c^{n-1} s_i + \frac{d_{i+2}}{d_1} c^{(n-2)+\ldots+(n-2-i)}$$

Поделим обе части на $c^{(n-1)+\ldots+(n-1-i)}$, получим

$$d_{i+1} \sim \frac{d_1 c^{n-1} s_i}{c^{(n-1)+\ldots+(n-1-i)}} + o(1)$$

Откуда следует, что

$$s_i \sim \frac{d_{i+1}}{d_1} c^{(n-2)+\ldots+(n-1-i)},$$

переход доказан

Последний шаг: рассмтрим многочлен $h(t)$ с корнями $t_2, \ldots, t_n$. Заметим, что он удовлетворяет условиям леммы. Во-первых, он имеет вещественные коэффициенты при любом $c > C_1$, так как может быть получен делением $g(t)$ на $x - t_1$, а $t_1(c) \in \mathbb{R}$ при $c > C_1$. Во-вторых, его коэффициенты при $c \to +\infty$ стремятся куда надо, так как его коэффициенты по теореме Виета – s_i(в обратном порядке), а поведение s_i описано выше. Значит, по предположению индукции мы можем перейти к многочлену меньшей степени $h(t)$, получить, что его корни будут вещественными при c больше некой константы, а при $c \to +\infty$ $t_2(c) \sim \frac{d_2}{d_1} c^{n-2}, \ldots, t_n(c) \sim \frac{d_n}{d_{n-1}}$, следовательно, переход доказан.

4.6 Теорема о наборах матриц размера $n \times n$

Любой набор матриц $A_1, A_2, \ldots, A_m \in GL_n(\mathbb{R})$ является полноспектровым.

Доказательство:

1) Покажем, что существует такая матрица R, что $\forall i \in 1, \ldots, m$ каждый из n определителей угловых миноров A_iR не равен 0 (это в частности будет означать, что $\det R \neq 0$, так как $\det A_iR \neq 0$, то есть $R \in GL_n(\mathbb{R})$).

Пусть $R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$, где каждый коэффициент - переменная.

Тогда каждый из коэффициентов A_iR - многочлен от $r_{11}, \ldots, r_{nn}$. Любой угловой минор - тоже многочлен от $r_{11}, \ldots, r_{nn}$. Заметим, что если $R = A_i^{-1}$, то $A_iR = I$, все n угловых минора равны 1, значит они – не тождественные 0. Проведем такое рассуждение для всех $i \in 1, \ldots m$, получим, что все nm угловых минора – не тождественные 0. Следовательно, по лемме об общем не корне существуют такие $r_{11}, \ldots, r_{nn}$, что все nm угловых минора у матриц A_iR ненулевые.

2) Будем рассматривать набор матриц $B_i = A_iR$. Докажем, что для него существует дополняющая матрица C, которая, более того, является диагональной и имеет вид $C = \begin{pmatrix} c^{n-1} & & & \\ & c^{n-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$. Будем называть $d_{i,j}$ определитель углового минора размера $j \times j$.

$$B_iC = \begin{pmatrix} b_{i,11}c^{n-1} & b_{i,12}c^{n-2} & \ldots & b_{i,1n} \\ b_{i,21}c^{n-1} & b_{i,22}c^{n-2} & \ldots & b_{i,2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i,n1}c^{n-1} & b_{i,n2}c^{n-2} & \ldots & b_{i,nn} \end{pmatrix}$$

Пусть $\chi_{B_iC}(t) = t^n - k_{i,n-1}t^{n-1} + \ldots + (-1)^n k_{i,0}$. Мы знаем, чему равны все $k_{i,j}$ (сумма всех определителей главных миноров размера $(n-j) \times (n-j)$):

$$\begin{aligned} &k_{i,n-1} = b_{i,11}c^{n-1} + b_{i,22}c^{n-2} + \ldots + b_{i,nn} \\ &k_{i,n-2} = (b_{i,11}b_{i,22} - b_{i,12}b_{i,21})c^{2n-3} + (b_{i,11}b_{i,33} - b_{i,13}b_{i,31})c^{2n-4} + \ldots \\ &\ \vdots \\ &k_{i,0} = \det(B_i)c^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

Устремим $c \to +\infty$, тогда:

$$\begin{aligned}
&k_{i,n-1} = d_{i,1}c^{n-1} + o(c^{n-1})\\
&k_{i,n-2} = d_{i,2}c^{2n-3} + o(c^{2n-3})\\
&\ \ \vdots\\
&k_{i,0} = d_{i,n}c^{\frac{n(n-1)}{2}}
\end{aligned}$$

Значит, $\chi_{B_iC}(t)$ удовлетворяет условиям Леммы 1. Применим её, получим, что $\forall i \in 1, \dots, n\ \exists c_i \in \mathbb{R}:\ \forall c > c_i\ \chi_{B_iC}(t)$ имеет n разных вещественных ненулевых корней. Возьмем $c_{fin} = \max(c_i)$. При $c > c_{fin}\ \chi_{B_iC}(t)$ имеет n различных вещественных ненулевых корней для каждого $i \in 1, \dots, n$. Это равносильно тому, что каждая из B_iC имеет максимальный вещественный спектр и максимальный ранг.

3) Итоговая дополняющая матрица начального набора RC.

4.7 Дополнение про вид дополняющей матрицы

Для любого набора матриц $A_1, A_2, \dots, A_m \in GL_n(\mathbb{R})$ существует нижнетреугольная дополняющая матрица.

Доказательство:

Докажем, опираясь на рассуждения из теоремы выше. Нижнетреугольность дополняющей матрицы соответствует нижнетруегольности R, поэтому далее будем искать именно её.

Докажем по индукции по n, что существует $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})\ \exists R \in SLT_n(\mathbb{R})$ такая, что каждый из n угловых миноров AR не равен 0.

База: $n = 1$, очевидно.

Переход: Покажем, что существует такая матрица $W = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ w_1 & w_2 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, что AW имеет ненулевой угловой минор размера $(n-1) \times (n-1)$.

Пусть $a_i \in \mathbb{R}^n$ – столбцы матрицы A, $\overline{a}_i \in \mathbb{R}^{n-1}$ – урезанные a_i. Так как a_i – базис в $\mathbb{R}^n$, то $\dim < \overline{a}_1, \dots, \overline{a}_n > = n - 1$. Значит, можно из $\overline{a}_i$ выбрать базис в $\mathbb{R}^{n-1}$, откинув ровно один вектор. Если можно откинуть $\overline{a}_n$, это означает, что нам подойдет $W = I$, так как в A нужный угловой минор уже не 0. Иначе же можно откинуть $\overline{a}_j,\ j < n$. Тогда заметим, что нам подойдет W, где $w_j = 1$, $w_i = 0\ \forall i \neq j$.

$$AW = \begin{pmatrix} a_1 + a_n w_1 & | & a_2 + a_n w_2 & | & \dots & | & a_n \end{pmatrix}$$

Верхняя левая подматрица $(n-1) \times (n-1)$:

$$\begin{pmatrix} \overline{a}_1 + \overline{a}_n w_1 & | & \dots & | & \overline{a}_{n-1} + \overline{a}_n w_{n-1} \end{pmatrix}$$

Чтобы посчитать её определитель, разложим по j-ому столбцу на $\overline{a}_j$ и $\overline{a}_n$. Получим, что определитель равен сумме определитей начальной подматрицы и начальной подматрицы с одним измененным столбцом, что равняется $0 +$ не 0 (по построению). Таким образом, мы получили ненулевой угловой минор размера $(n-1) \times (n-1)$.

По предположению индукции есть такая матрица $R \in SLT_{n-1}(\mathbb{R})$, что при домножении на не верхняя подматрица AW превращается в матрицу со всеми ненулевымии угловыми минорами. Заметим, что $AW \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица со всеми n неугловыми минорами (определитель тот же, что и у A, остальные миноры ненулевые по построению). Значит, $W \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – искомая матрица, переход доказан.

Осталось показать, что если для любой матрицы A_i существует нижнетреугольная, при домножении на которую получется матрица со всеми ненулевыми угловыми минорами, то и для набора матриц $A_1, \dots, A_m$ тоже такая есть. Применим уже стандартную технику: представим матрицу как набор из коэффициентов, являющихся переменными, если коэффициент на диагонали или ниже, или 0, если коэффициент выше диагонали. Тогда каждый из nm угловых миноров – многочлен, причем по утверждению выше – не тождественный 0. Значит, есть их общий не корень, соответствующий искомой нижнетреугольной R.

4.8 Теорема о существовании дополняющего базиса

Для любого набора матриц $A_1, A_2, \dots, A_m \in GL_n(\mathbb{F})$ существует дополняющий базис $X_1, X_2, \dots, X_{n^2} \in M_n(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Доказательство:

В случае $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ будем пытаться найти базис вида $R_1C, R_2C, \dots, R_{n^2}C$ (обозначения взяты из доказательства прошлой теоремы). Заметим, что $R_1C, R_2C, \dots, R_{n^2}C$ является базисом $\Leftrightarrow R_1, R_2, \ldots, R_{n^2}$ является базисом, так как $C \in GL_n(\mathbb{C})$. Поэтому будем искать базис R_i, а после уже подберем корректную C (с параметром c, при котором каждая из R_iC будет являться дополняющей; такой параметр точно существует, так как R_iC является дополняющей при c больше некой константы(c_{fin} в терминах прошлого доказательства)).

Следующая часть доказательства общая для $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. Из доказательства теоремы для $\mathbb{C}$, имеем, что R может быть получена как общий не корень каких-то многочленов, аналогично из доказательства для $\mathbb{R}$ следует, что дополняющая матрица X может быть получена как общий не корень каких-то многочленов. Покажем, что для любого набора многочленов (как комплексных, так и вещественных) существует базис $B_1, \ldots, B_{n^2}$ из не корней.

По усиленной лемме об общем не корне многочленов, применяемой для n^2 переменных, известно, что $\forall \epsilon > 0$ есть не корни в каждой из областей такого вида $[0;\epsilon] \times \ldots \times [1; 1+\epsilon] \times \ldots \times [0;\epsilon]$. Это значит, что мы можем выбрать B_i как набор n^2 матриц, у каждой из которых на одном месте будет стоять что-то близкое к 1, на остальных – близкое к 0. Поймем, что при малых ϵ B_i действительно получаются ЛНЗ, то есть задают базис. "Вытянем" матрицы, посмотрим на них как на векторы $n^2 \times 1$, из векторов сложим матрицу $n^2 \times n^2$ так, чтобы на диагонали стояли числа, близкие к 1. Оценим определитель получившейся матрицы, по определению это сумма $n!$ слагаемых. При этом одно из них (соответствующее диагонали) ≥ 1, а остальные по модулю $\leq \epsilon^2(1+\epsilon)^{n-2}$, откуда $det \geq 1-(n!-1)\epsilon^2(1+\epsilon)^{n-2}$. При $\epsilon \to 0$ это стремится к 1, значит $\exists \epsilon$: матрица $n^2 \times n^2$ невырождена, ей соответствует базис $B_1, \ldots, B_{n^2}$.

4.9 Лемма о существовании дополняющих базисов

Для любого набора матриц $A_1, A_2, \ldots, A_m \in GL_n(\mathbb{F})$, любого $k \in \mathbb{N}$ существуют k дополняющих базисов для начального набора, также являющимися дополняющими по отношению друг к другу.

Доказательство:

Будем строить базисы последовательно. Первый - дополняющий к начальному набору. Такой существует по предыдущей теореме. Второй - дополняющий к набору, являющимся объединением начального набора и первого построенного базиса, такой снова существует по предыдущей теореме. Продолжая строить таким образом, построим ровно то, что нам надо.

5 Заключение

Любой набор из конечного числа матриц (и вещественных, и комплексных) является полноспектровым. Более того, для любого набора существует дополняющий базис.

Список литературы

[1] G. Frobenius. “U ber die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen”. В: Sitzungsber. Deutsch. Akad. Wiss. (1897), с. 994—1015.

[2] Alexander Guterman, Artem Maksaev и Valentin Promyslov. “Pairs of maps preserving singularity on subsets of matrix algebras”. В: Linear Algebra and Its Applications 644 (2022), с. 1—27.

[3] D.J. Dieudonne. “Sur une generalisation du groupe orthogonal a‘ quatre variables”. В: Arch. Math. 1 (1949), с. 282—287.

6 Приложения

Некоторые термины, использующиеся в работе:

- Определитель - численная характеристика квадратной матрицы
- ЖНФ - Жорданова Нормальная Форма - удобный вид представления матрицы
- Угловой минор - определитель блока матрицы, образованного левым верхним углом исходной матрицы