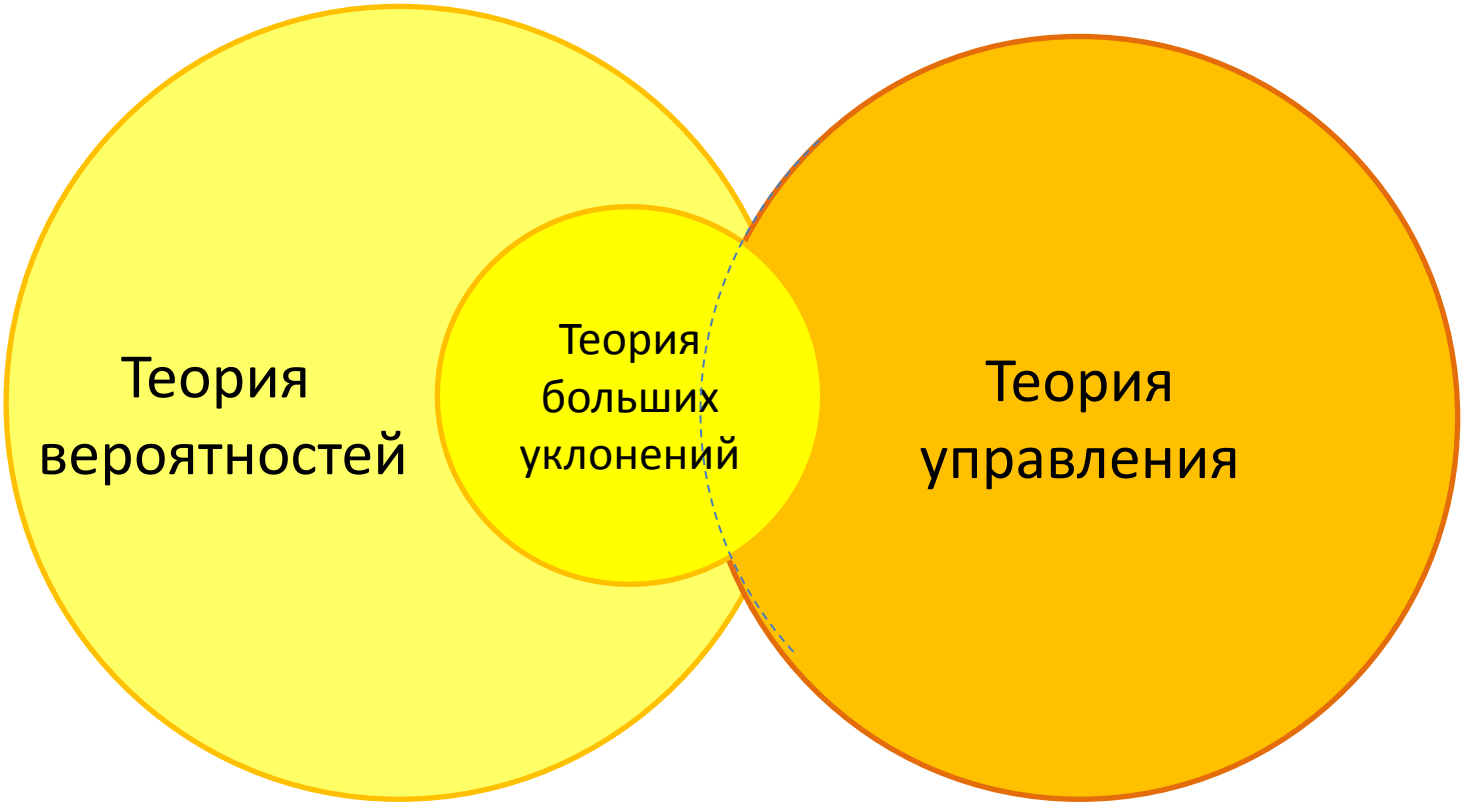
Применение принципа больших уклонений в задачах управления техническими системами

Руководитель: Дубовик С.А., д.т.н., профессор

Севастопольский государственный университет

Липко И.Ю., аспирант

Севастопольский государственный университет


Теория вероятностей
Теория больших уклонений
Теория управления

- **Что такое большие уклонения**
  - Пример
  - Теорема Крамера
- Функционал действия
  - Теорема Вентцеля-Фрейдлина
- Применение в задачах управления
  - Идея
  - Примеры

Большие уклонения. Пример

Дана последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.
Выборочное среднее S_n , содержащего *n* элементов

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Для **экспоненциально** распределённых X_i имеем.

ф.п.в. S_n по ЦПТ:

$$f_{S_n}^{CPT}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2/n)},$$

ф.п.в. S_n по ПБУ:

$$f_{S_n}^{LDP}(x) \approx e^{-nI(x)},$$

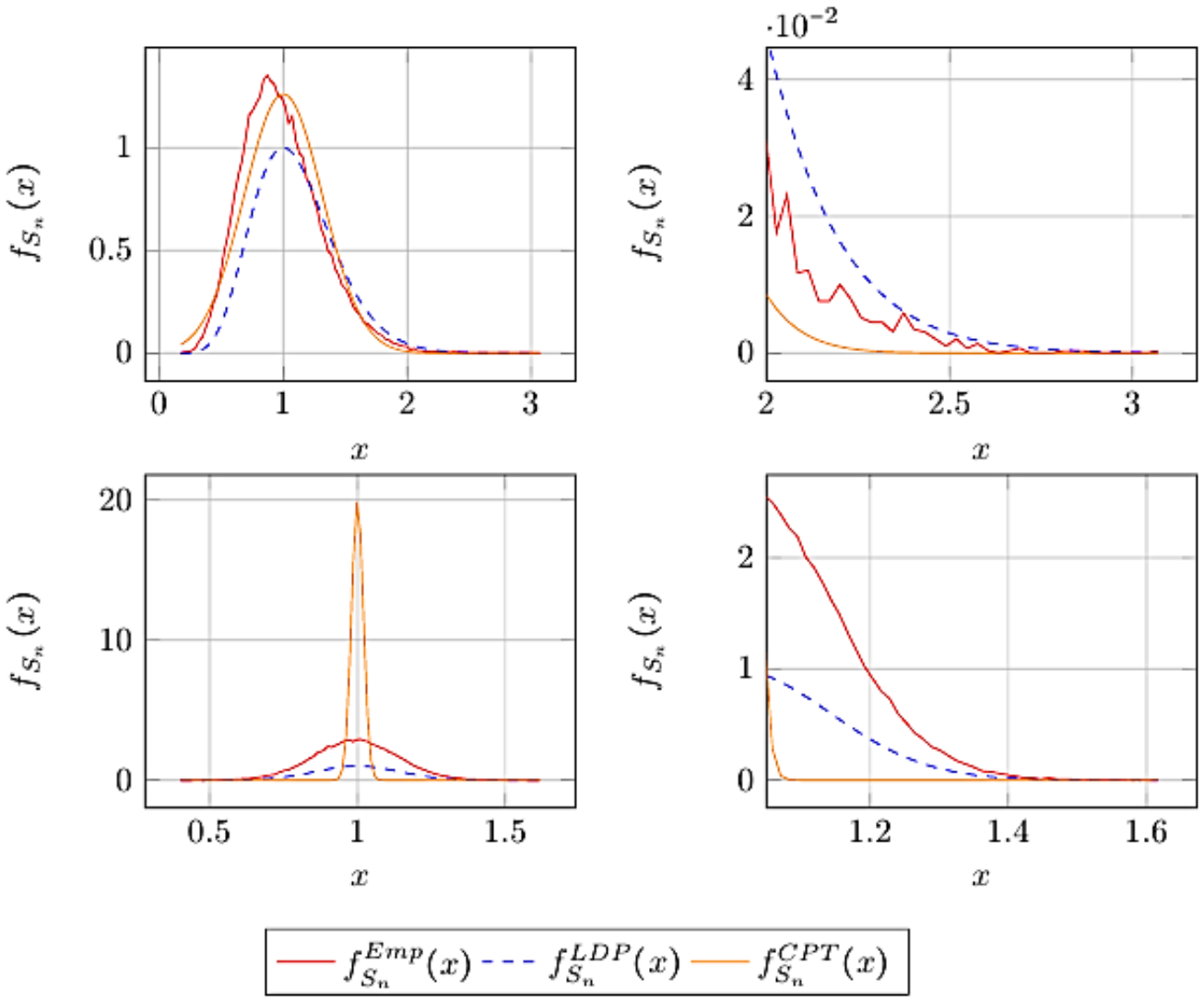
где $I(x) = \lambda x - 1 - \ln(\lambda x)$.

$$f_{S_n}^{Emp}(x) = \frac{P(S_n \in [s, s+\Delta s])}{\Delta s}.$$

Большие уклонения. Пример

n = 10

n = 50



- Что такое большие уклонения
  - Пример
  - Теорема Крамера
- **Функционал действия**
  - Теорема Вентцеля-Фрейдлина
- Применение в задачах управления
  - Идея
  - Примеры

Функционал действия. Вентцель-Фрейдлин

$$\dot{x}_t = b(x_t), \quad x_0 = x, \quad b(x) = (b^1(x), \ldots, b^r(x))$$

$$\dot{X}_t^{\varepsilon} = b(X_t^{\varepsilon}) + \varepsilon \dot{\omega}_t, \quad X_0^{\varepsilon} = x$$

где ω_t – *r*-мерный винеровский процесс;

функции *b* – ограничены и удовлетворяют условию Липшица.

Функционал действия. Вентцель-Фрейдлин

Обозначим:

$$H_D(t,x) = \{\varphi \in C_{0t_f}(R^r) : \varphi_0 = x, \varphi_t \in D \cup \partial D\}$$

$$\bar{H}_D(t,x) = \{\varphi \in C_{0t_f}(R^r) : \varphi_0 = x, \varphi_t \notin D \cup \partial D \quad при \quad t \in [0,t_f]\}$$

$\tau^\varepsilon = \min\{t : X_t^\varepsilon \notin D\}$, где X_t^ε решение не возмущённой системы

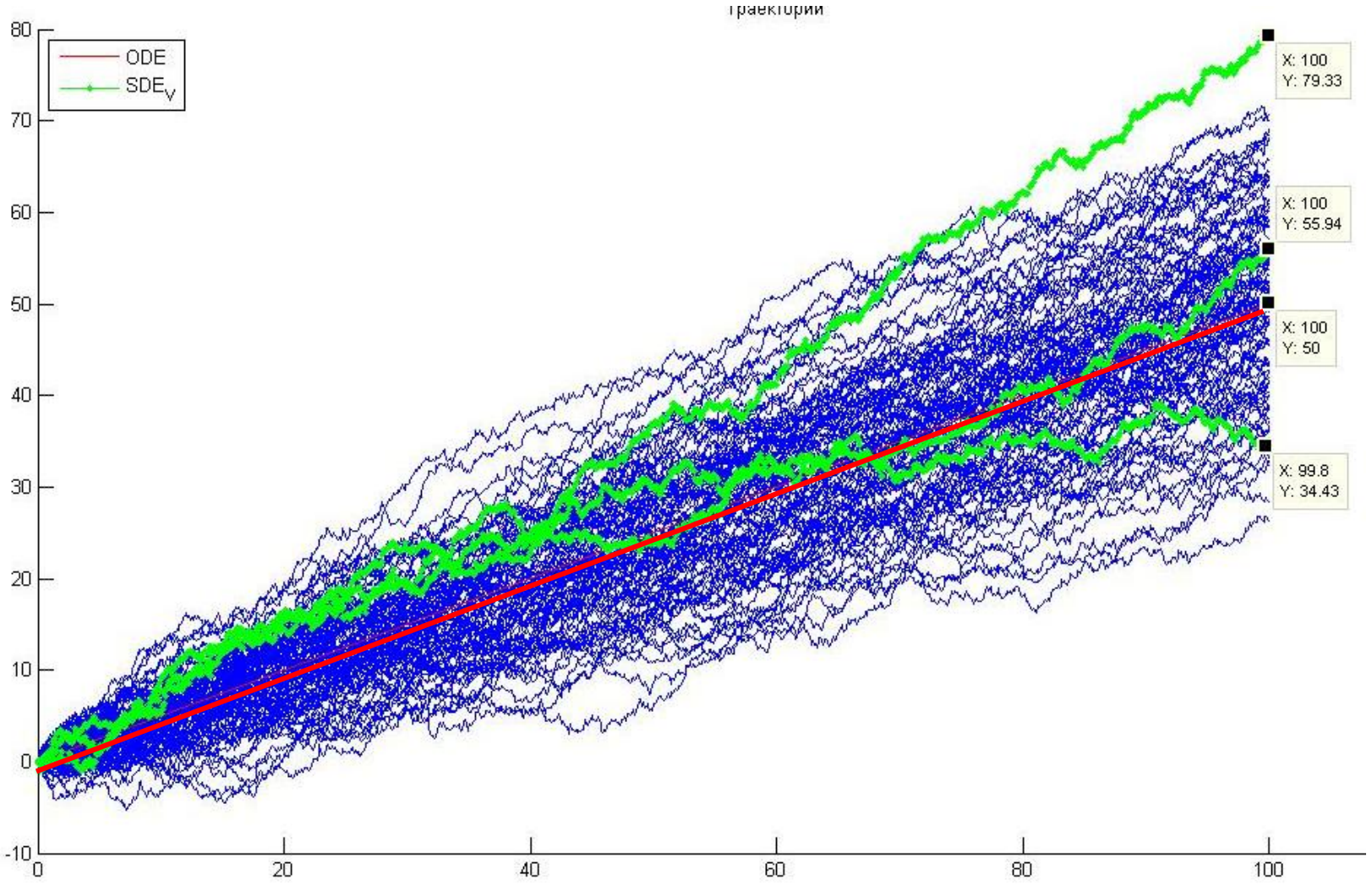
Оценки:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln P_x\{X_t^\varepsilon \in D\} = -\min_{\varphi \in H_D(t,x)} S_{0t_f}(\varphi)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln P_x\{\tau^\varepsilon \le t_f\} = -\min_{\varphi \in \bar{H}_D(t,x)} S_{0t_f}(\varphi)$$

где $S_{0t_f}(\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left|\dot{\varphi} - b(\varphi)\right|^2 dt$

Функционал действия. Пример



- Что такое большие уклонения
  - Пример
  - Теорема Крамера
- Функционал действия
  - Теорема Вентцеля-Фрейдлина
- **Применение в задачах управления**
  - Идея
  - Примеры

Применение в задачах управления. Идея

Для линейной системы

$$\dot{\varphi} = A\varphi + \sigma v, \quad \varphi(t_f) = \varphi_{t_f} \tag{1}$$

функционал для оценки интенсивности внешнего возмущения

$$I(v) = \varepsilon^{-2} S_{0t_f}(v) = \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} \int_0^{t_f} v^T v dt$$

Оценка вероятности больших уклонений (редких событий)

$$P = e^{I(v)}$$

Применение в задачах управления. Идея

Для линейной системы

$$\dot{\varphi} = A\varphi + \sigma v, \quad \varphi(t_f) = \varphi_{t_f} \tag{1}$$

функционал для оценки интенсивности внешнего возмущения

$$I(v) = \varepsilon^{-2} S_{0t_f}(v) = \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} \int_0^{t_f} v^T v dt$$

Задача Лагранжа

$$\min_v \int_0^{t_f} v^T v dt$$

Применение в задачах управления. Идея

$$H = \psi^T (A\varphi + \sigma\nu) + \frac{1}{2}\nu^T\nu$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

$$\dot{\psi} = -A^T\psi$$

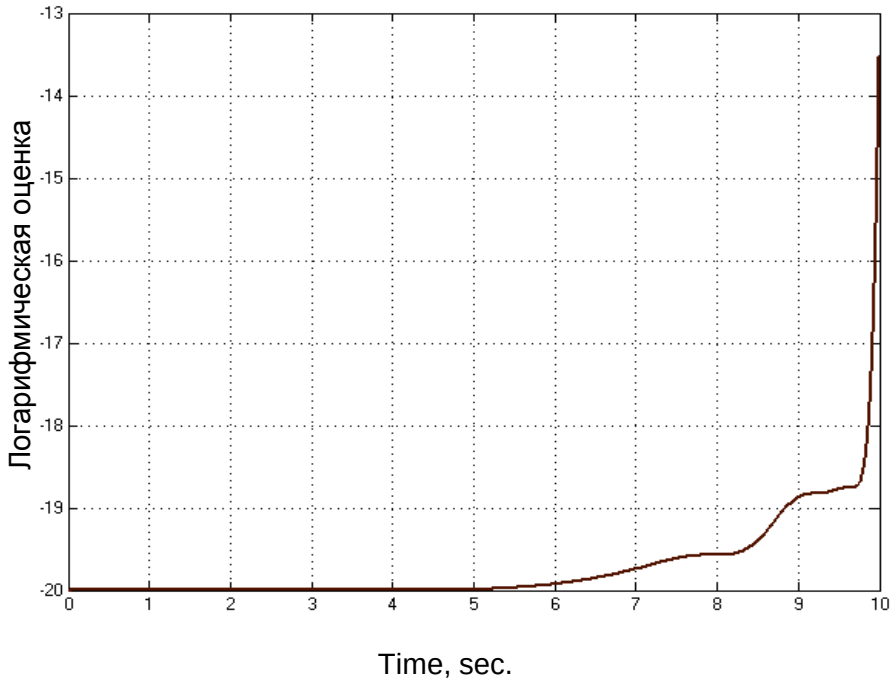
$$\upsilon = \sigma^T\psi$$

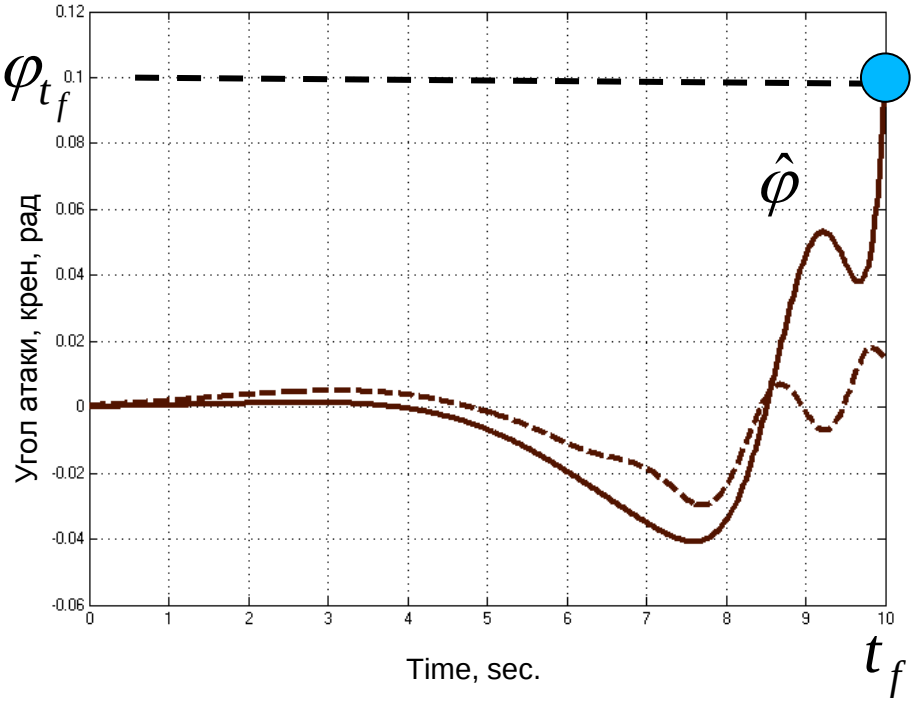
Подставляем в (1) и $\psi_{t_f} = D^{-1}\varphi_{t_f}$ (*D - решение* $-\sigma\sigma^T = A^T D + DA$) получаем

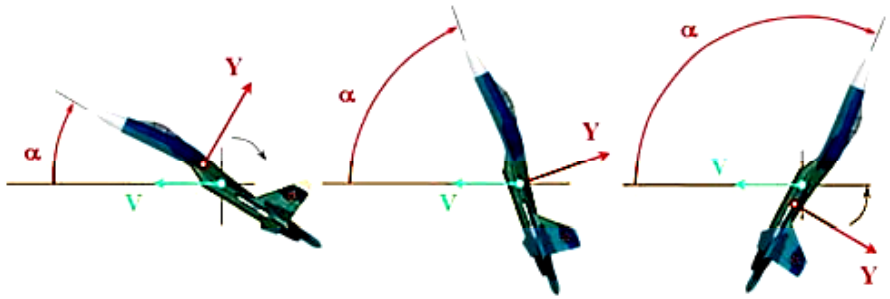
$$\hat{\varphi}(t) = e^{A^T(t-t_f)}\varphi(t_f) + \left(\int_0^{t_f} e^{A^T(t-\tau)}\sigma\sigma^T e^{A^T(t_f-\tau)}d\tau\right)\psi(t_f)$$

Применение в задачах управления. Пример №2а

Логарифмическая оценка вероятности сваливания для самолёта F-4 Phantom, угол атаки (-) и крен (- - -).

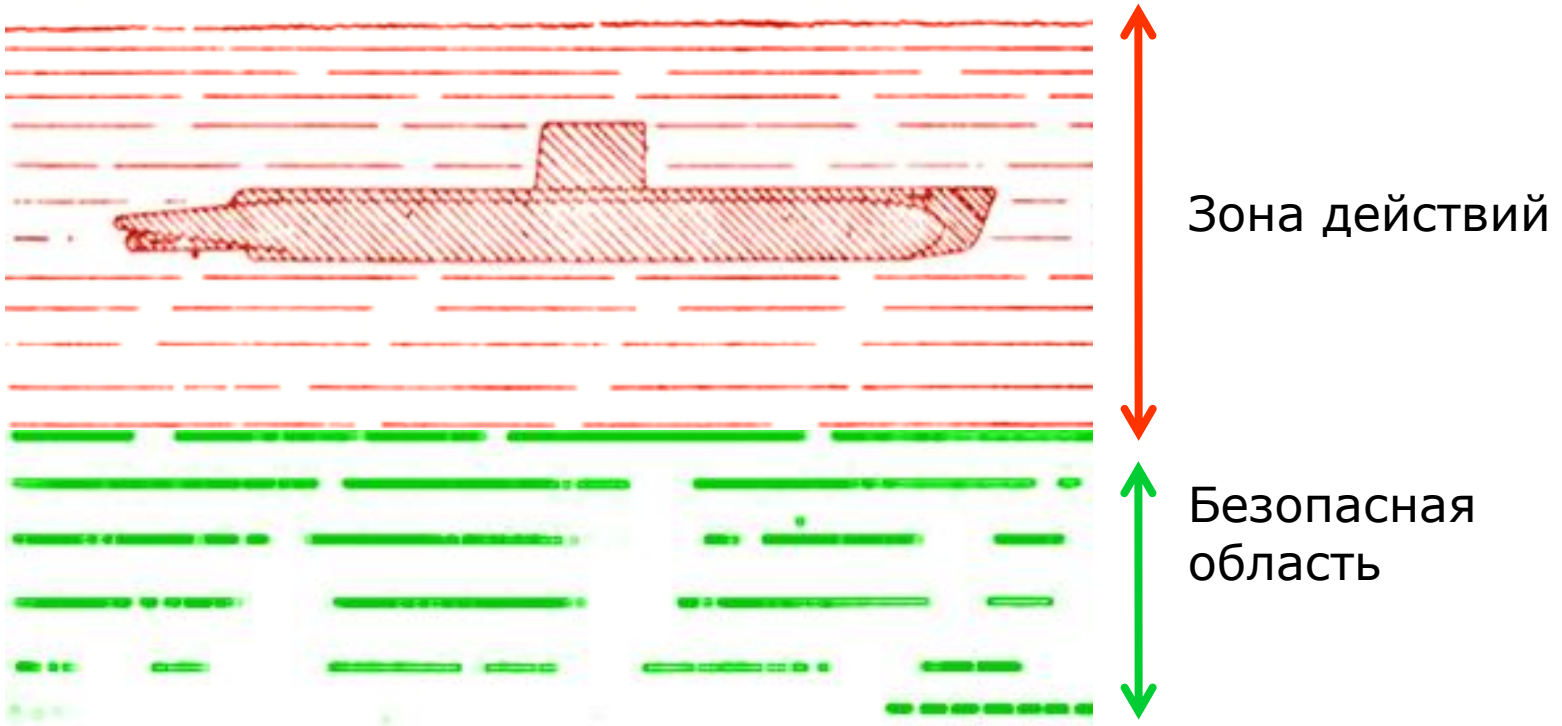




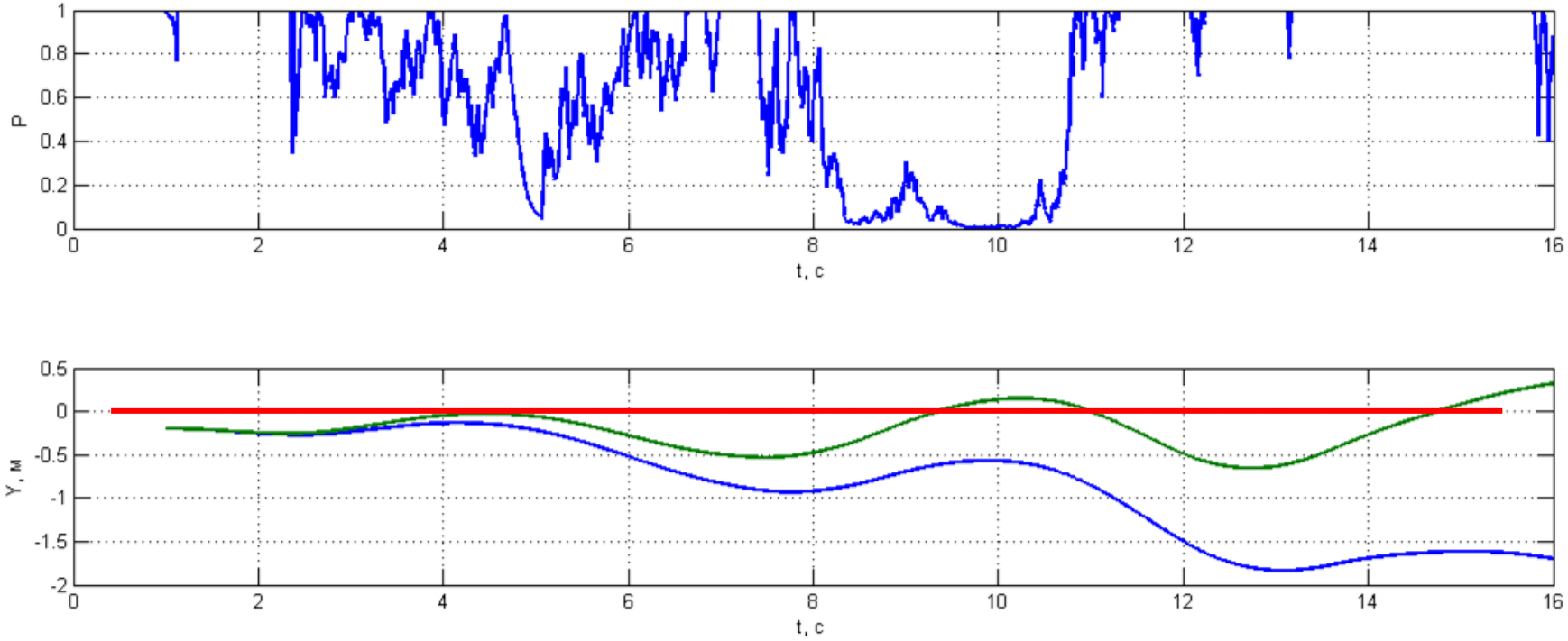


- Что такое большие уклонения
  - Пример
  - Теорема Крамера
- Функционал действия
  - Теорема Вентцеля-Фрейдлина
- Применение в задачах управления
  - Идея
  - **Примеры**

Применение в задачах управления. Пример №1

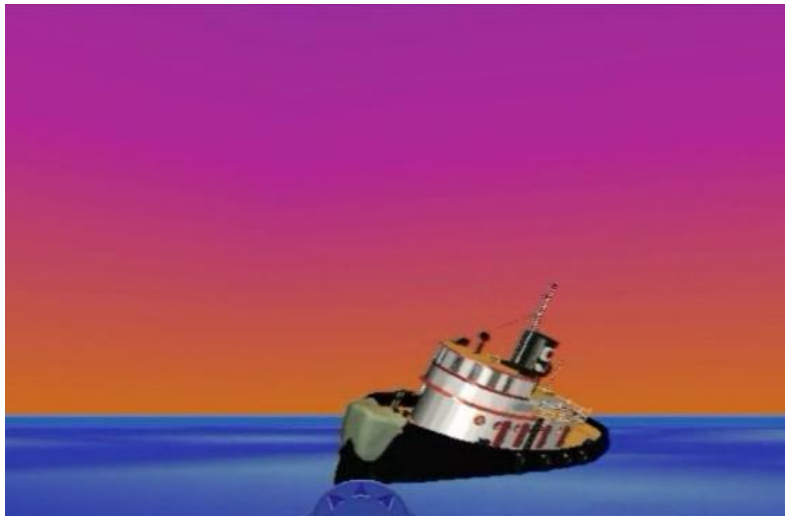


Применение в задачах управления. Пример №1

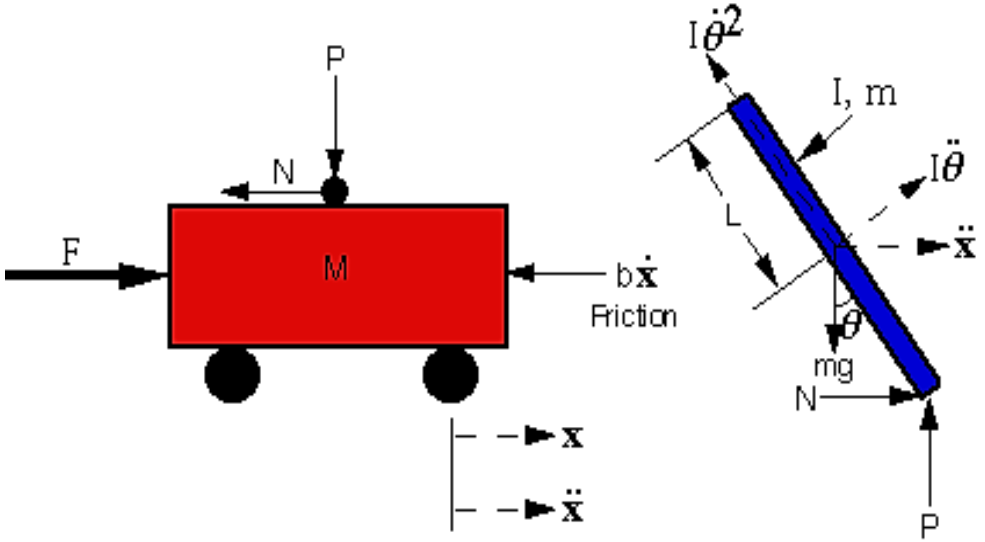


Дубовик, Логинов, Липко

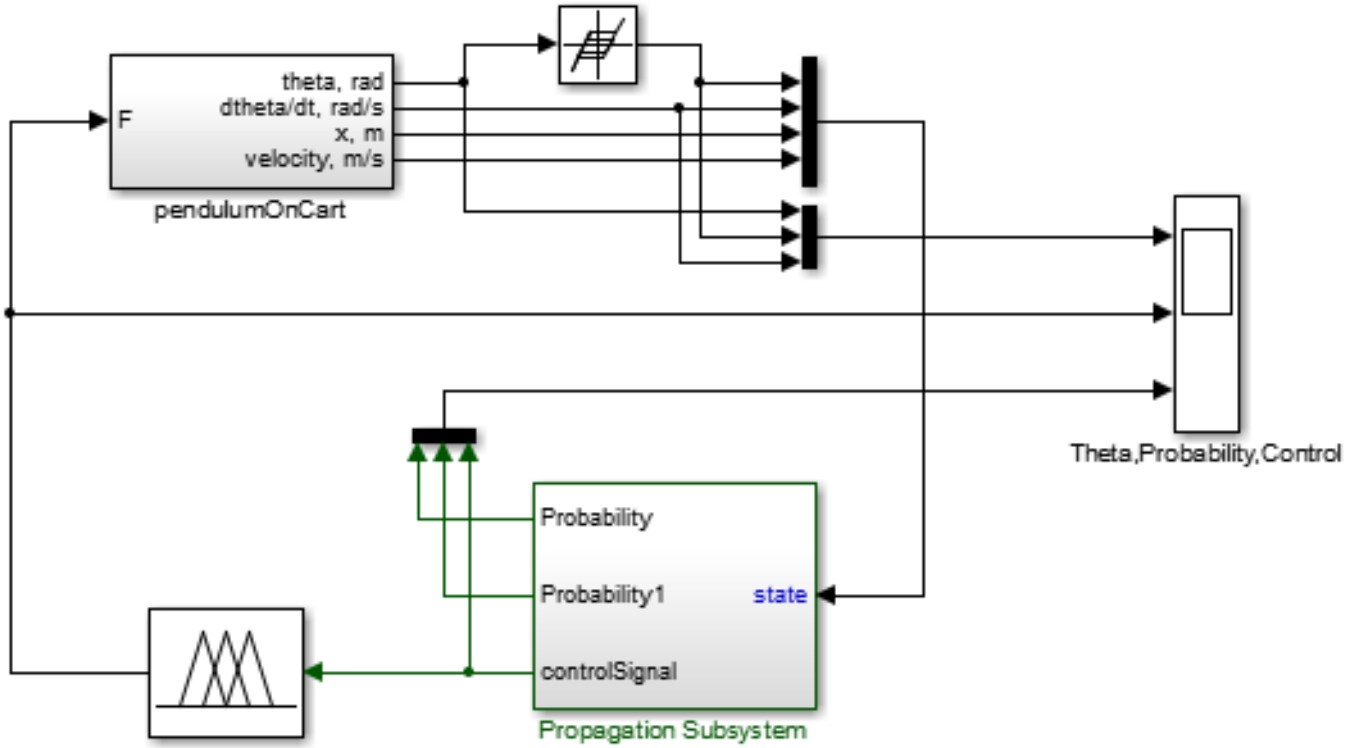
Применение в задачах управления. Пример №2



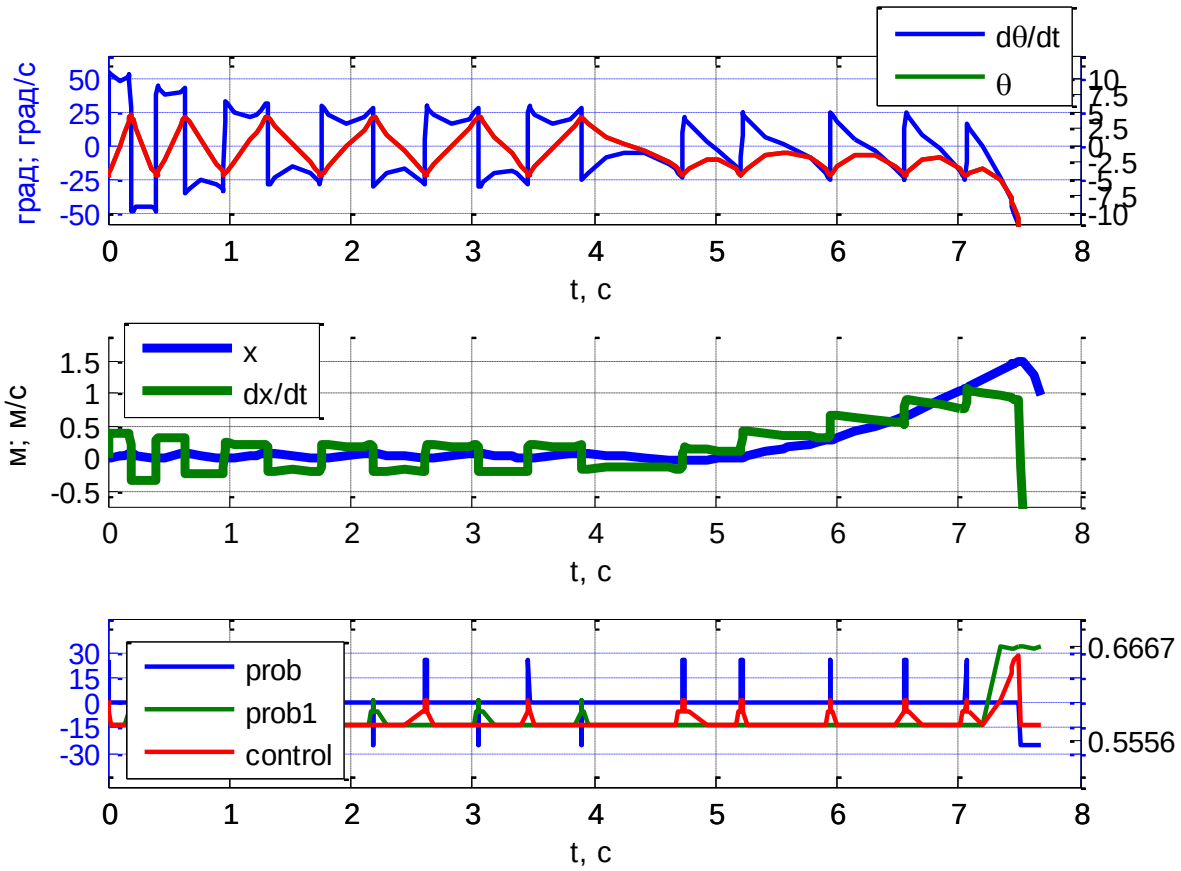
Применение в задачах управления. Пример №3



Применение в задачах управления. Пример №3

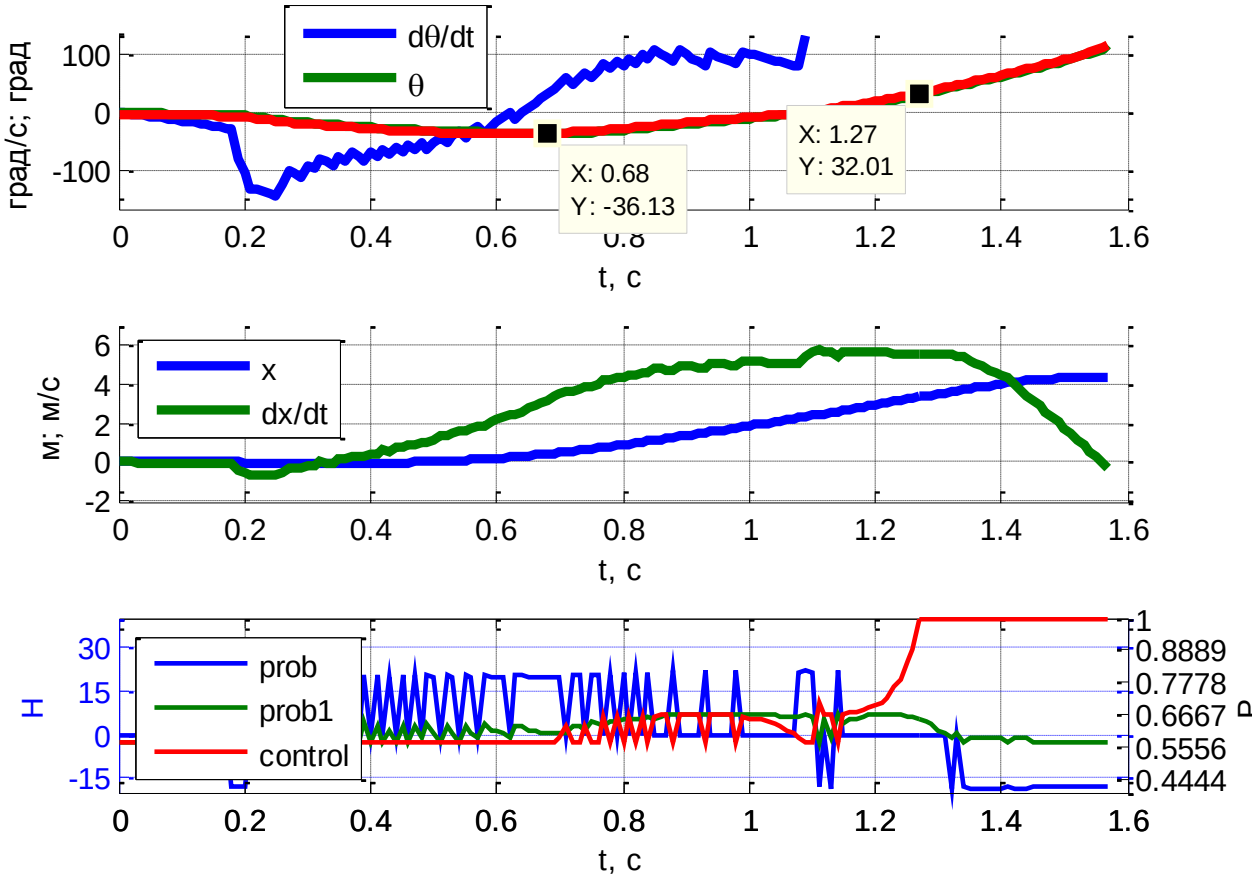


Simulink-схема системы управления перевёрнутым маятником (с нелинейным элементом типа «Люфт»). Блок прогноза и нечёткой логики



САУ с ООС (коэффициент усиления 25). Без нелинейности.
Параметры прогноза: ε =1E-4 E_{γ} =[0.3 0 0.3 0]

Есть примеры успешного управления этим способом до 50 секунд



САУ с ООС (нечёткий регулятор). Люфт = 5 град

Параметры прогноза: ε =1E-4 E_{γ} =[1 0 1 0.1]

Ссылки

1. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
2. CTMS Example: Modeling an Inverted Pendulum in Simu-link URL: http://faculty.ksu.edu.sa/eltamaly/Documents/tutorials/Matlab/tutorial1/ctms/simulink/examples/pend/pendsim.htm;
3. Дубовик С.А. О возможности прогноза и предотвращения критических состояний при управлении процессами диффузионного типа. XII Всероссийское совещание по проблемам управления, 2014, Москва
4. Нечаев Ю.И. Дубовик С.А. Оценка вероятности больших уклонений возмущённой динамической системы // Морские интеллектуальные технологии, 2009. №3, с.21-27
5. Липко И.Ю. Создание гибридной системы управления перевёрнутым маятником на тележке с использованием функционала действия / И.Ю. Липко // Интеллектуальные системы, управление и мехатроника – 2016 [Электронный ресурс]: Материалы междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 2016 г.
6. Липко И.Ю. Прогноз кризисных состояний движения судна на воздушной подушке с использованием функционала действия / И.Ю. Липко // Информационные технологии и управление, № 1, 2015 С.22-27

Иван Липко

ivanlipko@yandex.ru

Севастопольский государственный университет
г. Севастополь, Россия