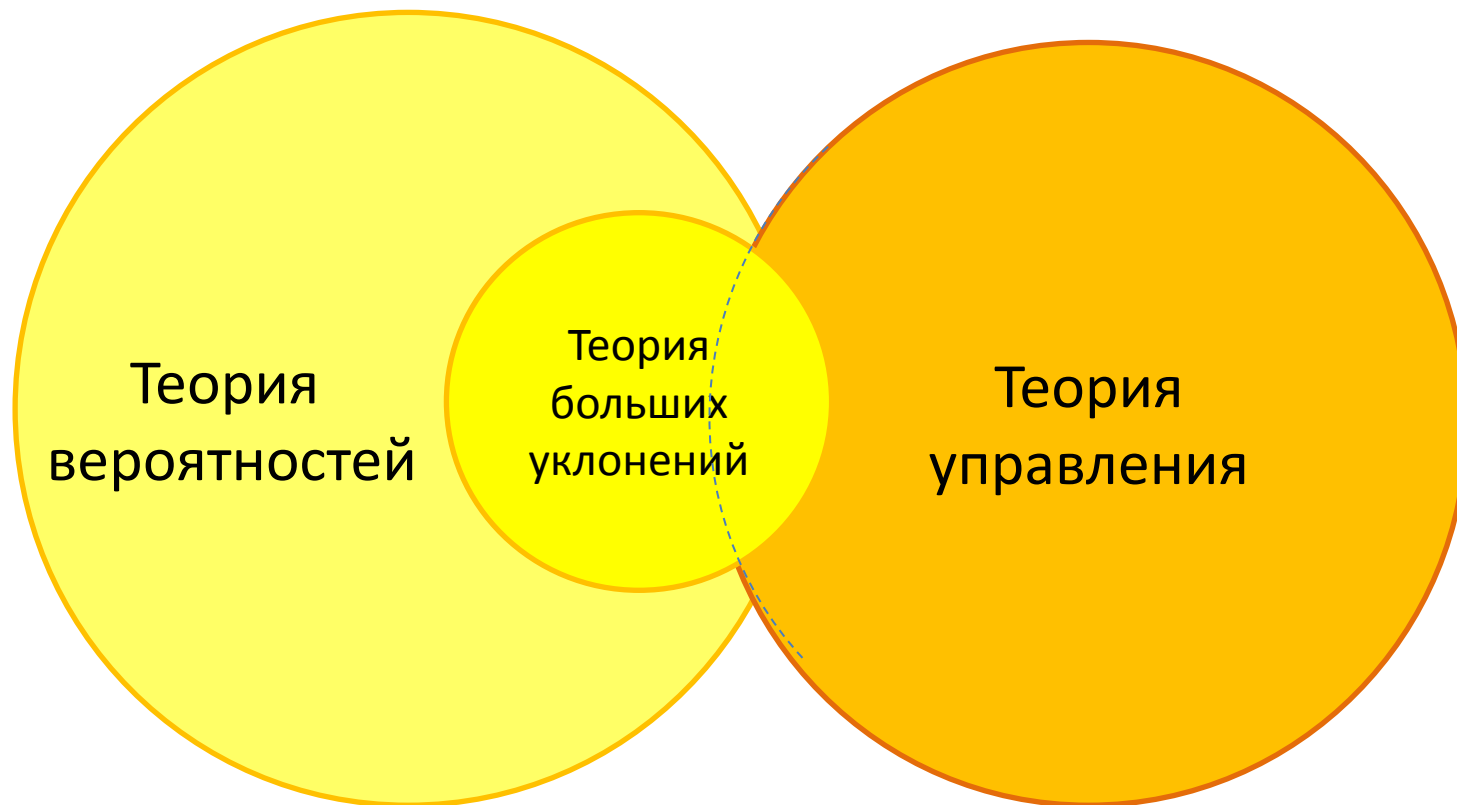


# Применение принципа больших уклонов в задачах управления техническими системами

Руководитель: Дубовик С.А., д.т.н.,  
профессор  
Севастопольский государственный  
университет

Липко И.Ю., аспирант  
Севастопольский государственный  
университет



- **Что такое большие отклонения**
  - Пример
  - Теорема Крамера
- **Функционал действия**
  - Теорема Вентцеля-Фрейдлина
- **Применение в задачах управления**
  - Идея
  - Примеры

# Большие уклонения. Пример

Дана последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Выборочное среднее  $S_n$ , содержащего  $n$  элементов

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Для экспоненциально распределённых  $X_i$  имеем.

ф.п.в.  $S_n$  по ЦПТ:

$$f_{S_n}^{CPT}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2/n)},$$

ф.п.в.  $S_n$  по ПБУ:

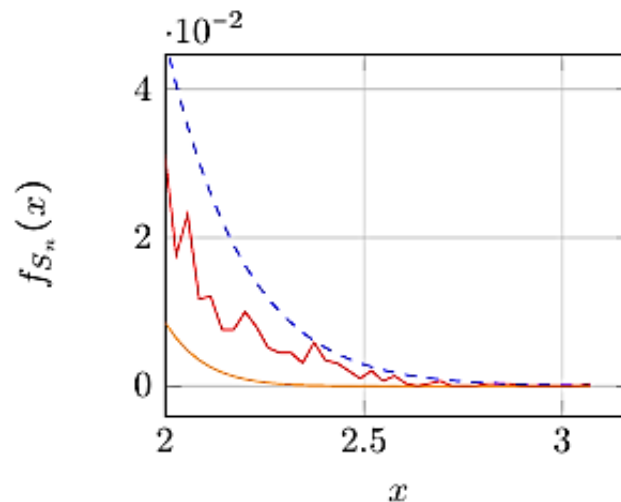
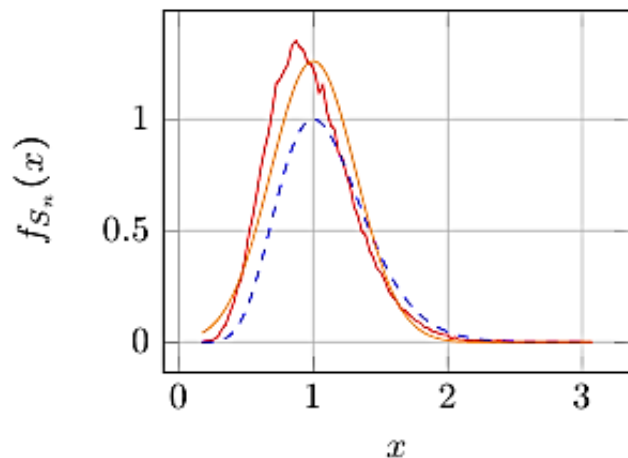
$$f_{S_n}^{LDP}(x) \approx e^{-nI(x)},$$

где  $I(x) = \lambda x - 1 - \ln(\lambda x)$ .

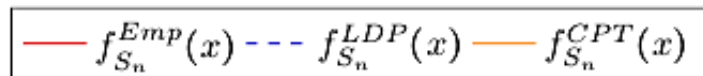
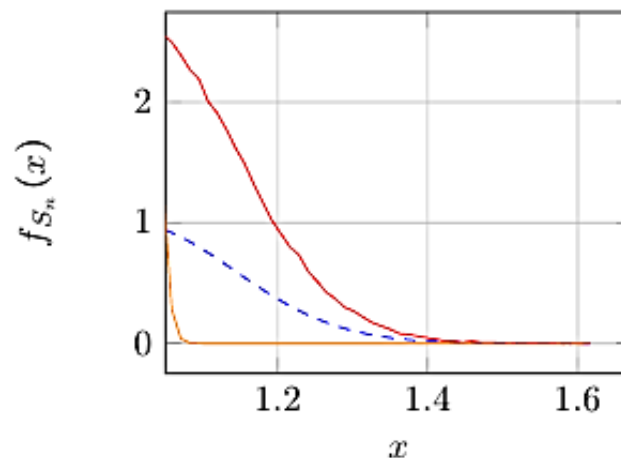
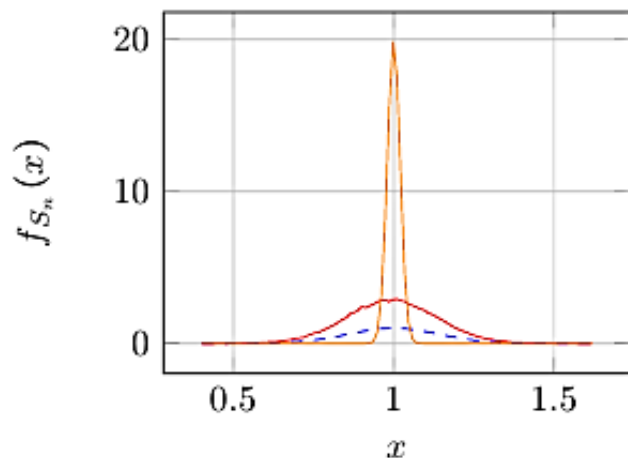
$$f_{S_n}^{Emp}(x) = \frac{P(S_n \in [s, s + \Delta s])}{\Delta s}.$$

# Большие уклонения. Пример

$n = 10$



$n = 50$



- Что такое большие отклонения
  - Пример
  - Теорема Крамера
- **Функционал действия**
  - Теорема Вентцеля-Фрейдлина
- Применение в задачах управления
  - Идея
  - Примеры

# Функционал действия. Вентцель-Фрейдлин

$$\dot{x}_t = b(x_t), \quad x_0 = x, \quad b(x) = (b^1(x), \dots, b^r(x))$$

$$\dot{X}_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon) + \varepsilon \dot{\omega}_t, \quad X_0^\varepsilon = x$$

где  $\omega_t$  –  $r$ -мерный винеровский процесс;

функции  $b$  – ограничены и удовлетворяют условию Липшица.

# Функционал действия. Вентцель-Фрейдлин

Обозначим:

$$H_D(t, x) = \{\varphi \in C_{0t_f}(R^r) : \varphi_0 = x, \varphi_t \in D \cup \partial D\}$$

$$\bar{H}_D(t, x) = \{\varphi \in C_{0t_f}(R^r) : \varphi_0 = x, \varphi_t \notin D \cup \partial D \text{ при } t \in [0, t_f]\}$$

$$\tau^\varepsilon = \min\{t : X_t^\varepsilon \notin D\}, \text{ где } X_t^\varepsilon \text{ решение не возмущённой системы}$$

Оценки:

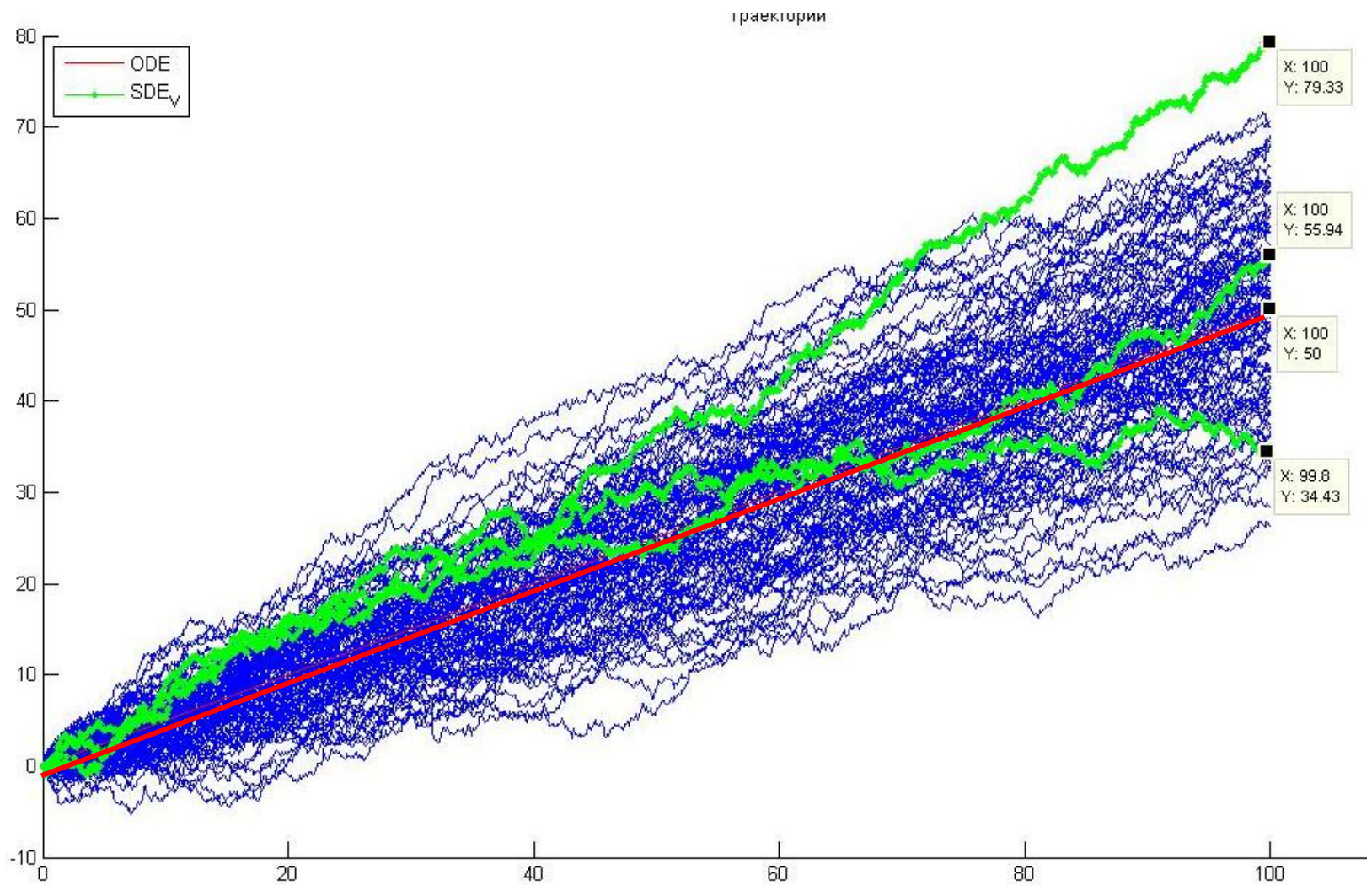
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P_x\{X_t^\varepsilon \in D\} = - \min_{\varphi \in H_D(t, x)} S_{0t_f}(\varphi)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \ln P_x\{\tau^\varepsilon \leq t_f\} = - \min_{\varphi \in \bar{H}_D(t, x)} S_{0t_f}(\varphi)$$

где 
$$S_{0t_f}(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} |\dot{\varphi} - b(\varphi)|^2 dt$$



# Функционал действия. Пример



- Что такое большие уклонения
  - Пример
  - Теорема Крамера
- Функционал действия
  - Теорема Вентцеля-Фрейдлина
- **Применение в задачах управления**
  - Идея
  - Примеры

# Применение в задачах управления. Идея

Для линейной системы

$$\dot{\varphi} = A\varphi + \sigma v, \quad \varphi(t_f) = \varphi_{t_f} \quad (1)$$

функционал для оценки интенсивности внешнего возмущения

$$I(v) = \varepsilon^{-2} S_{0t_f}(v) = \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} \int_0^{t_f} v^T v dt$$

Оценка вероятности больших уклонений (редких событий)

$$P = e^{I(v)}$$

# Применение в задачах управления. Идея

Для линейной системы

$$\dot{\varphi} = A\varphi + \sigma v, \quad \varphi(t_f) = \varphi_{t_f} \quad (1)$$

функционал для оценки интенсивности внешнего возмущения

$$I(v) = \varepsilon^{-2} S_{0t_f}(v) = \varepsilon^{-2} \frac{1}{2} \int_0^{t_f} v^T v dt$$

Задача Лагранжа

$$\min_v \int_0^{t_f} v^T v dt$$

# Применение в задачах управления. Идея

$$H = \psi^T (A\varphi + \sigma v) + \frac{1}{2} v^T v$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

$$\dot{\psi} = -A^T \psi$$

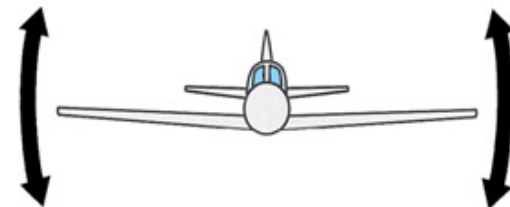
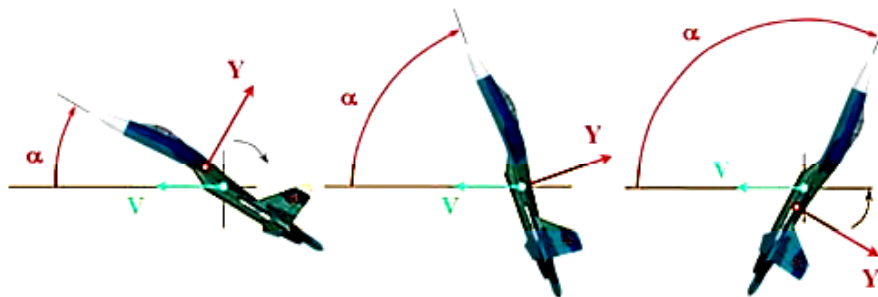
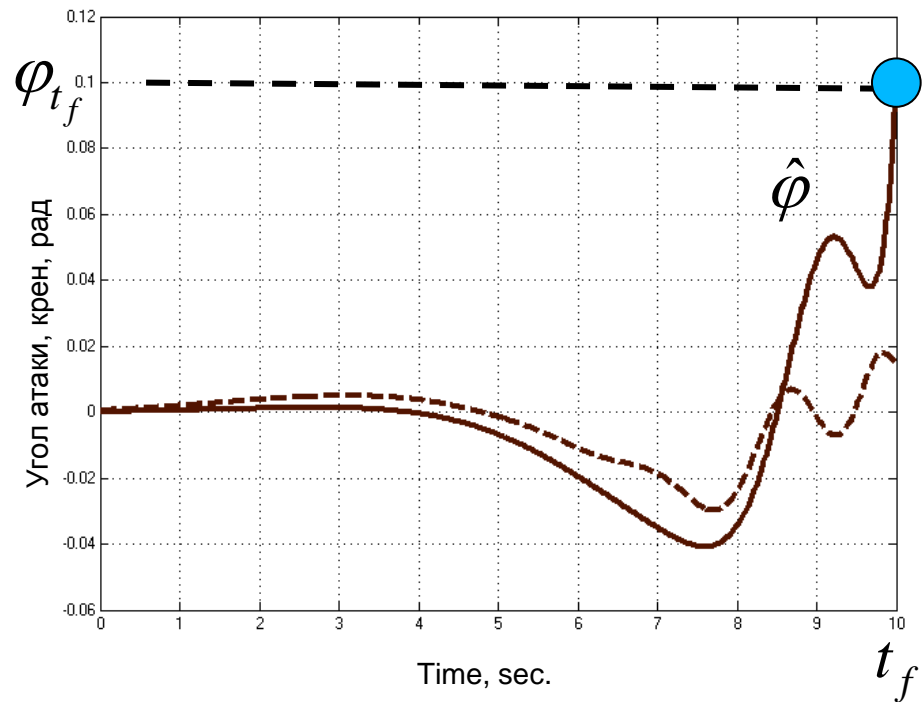
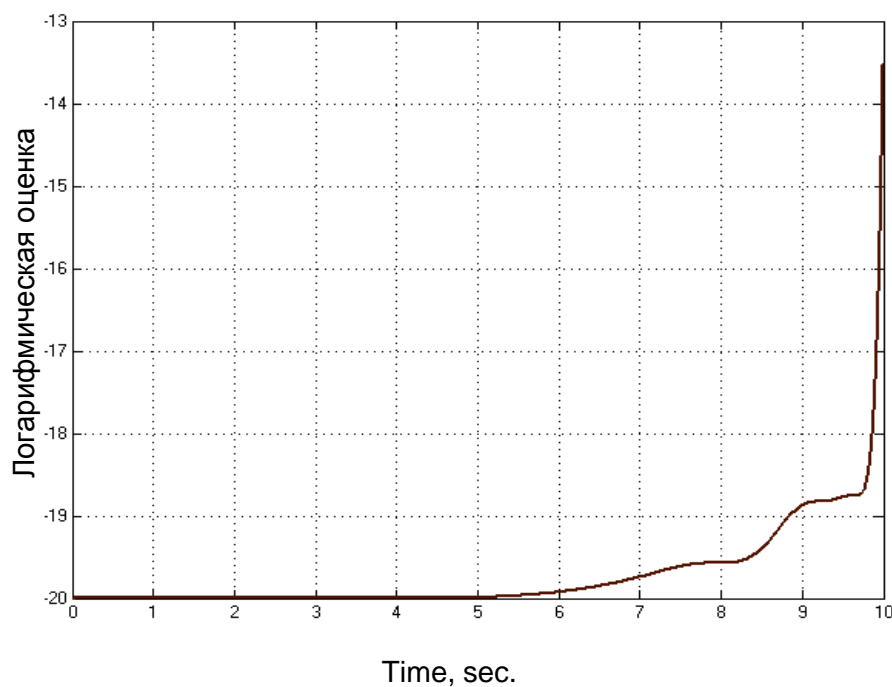
$$v = \sigma^T \psi$$

Подставляем в (1) и  $\psi_{t_f} = D^{-1} \varphi_{t_f}$  ( $D$  - решение  $-\sigma\sigma^T = A^T D + DA$ ) получаем

$$\hat{\varphi}(t) = e^{A^T(t-t_f)} \varphi(t_f) + \left( \int_0^{t_f} e^{A^T(t-\tau)} \sigma\sigma^T e^{A^T(t_f-\tau)} d\tau \right) \psi(t_f)$$

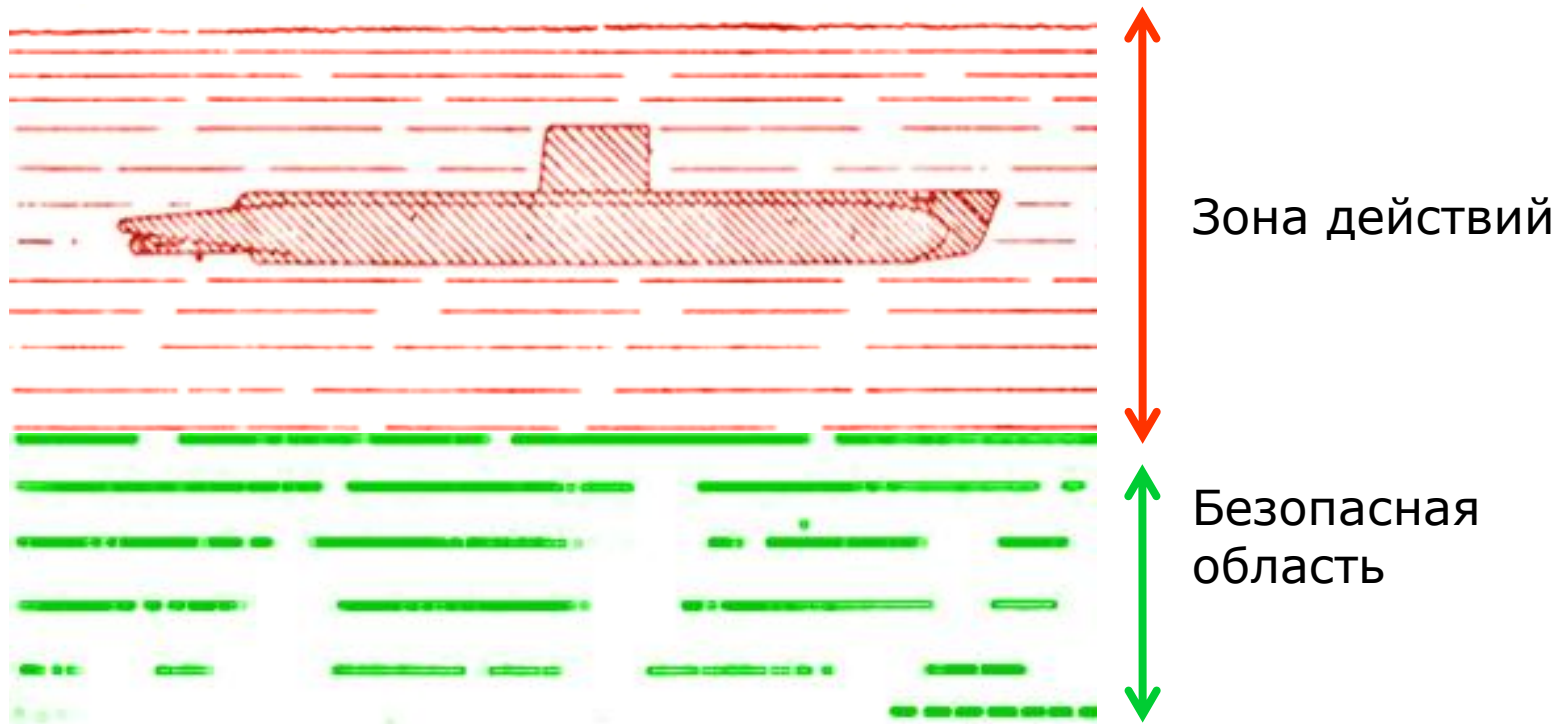
# Применение в задачах управления. Пример №2а

Логарифмическая оценка вероятности сваливания для самолёта F-4 Phantom, угол атаки (-) и крен (- - -).



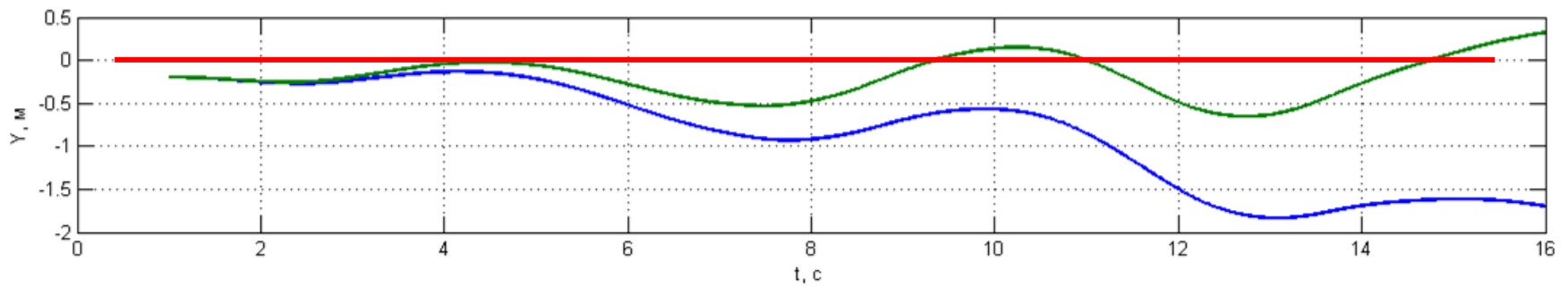
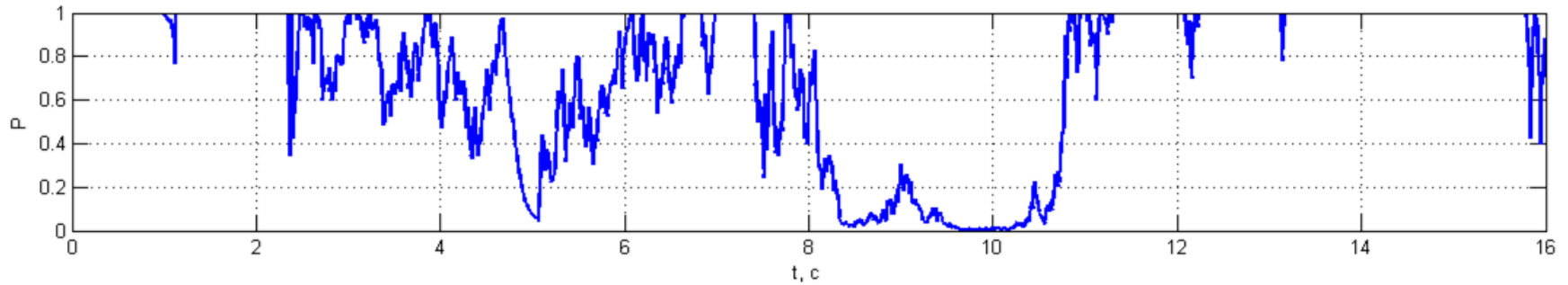
- Что такое большие отклонения
  - Пример
  - Теорема Крамера
- Функционал действия
  - Теорема Вентцеля-Фрейдлина
- Применение в задачах управления
  - Идея
  - **Примеры**

# Применение в задачах управления. Пример №1





# Применение в задачах управления. Пример №1

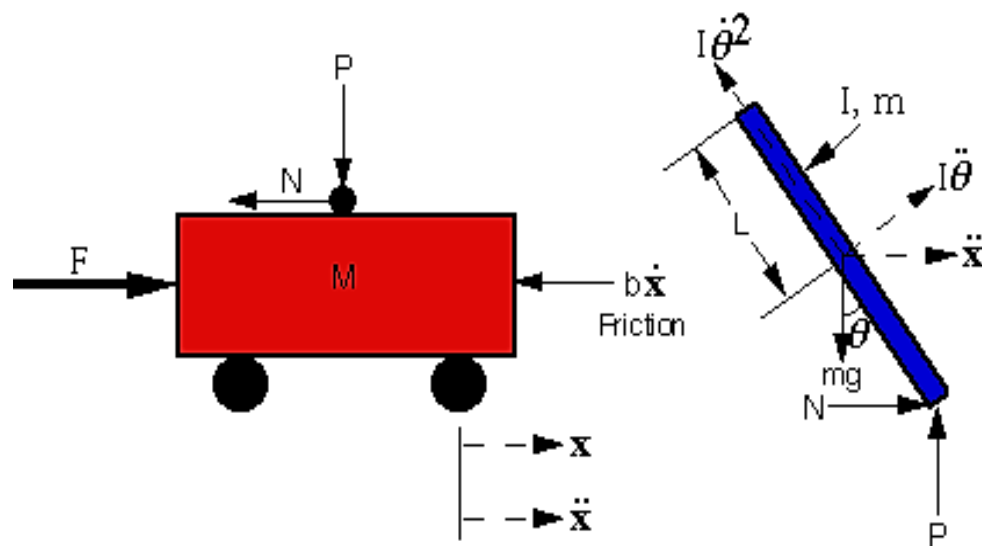


Дубовик, Логинов, Липко

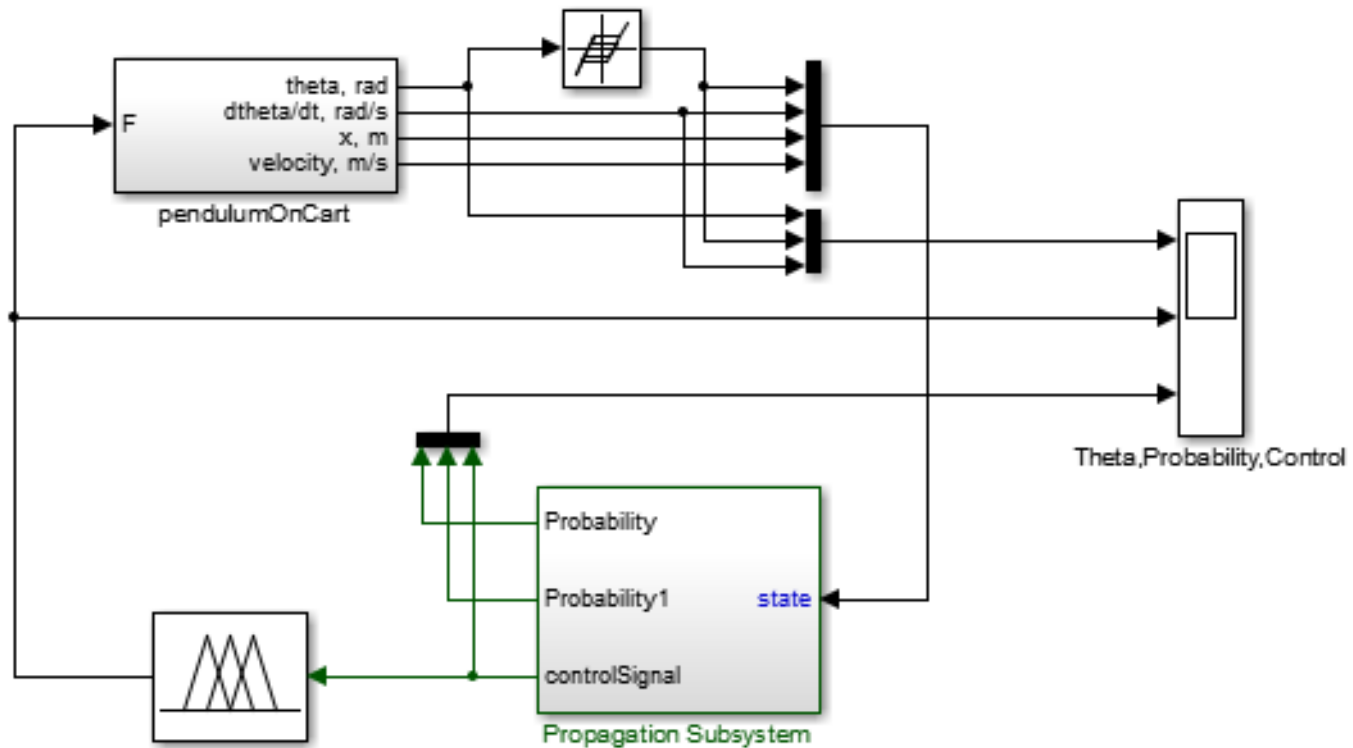
# Применение в задачах управления. Пример №2



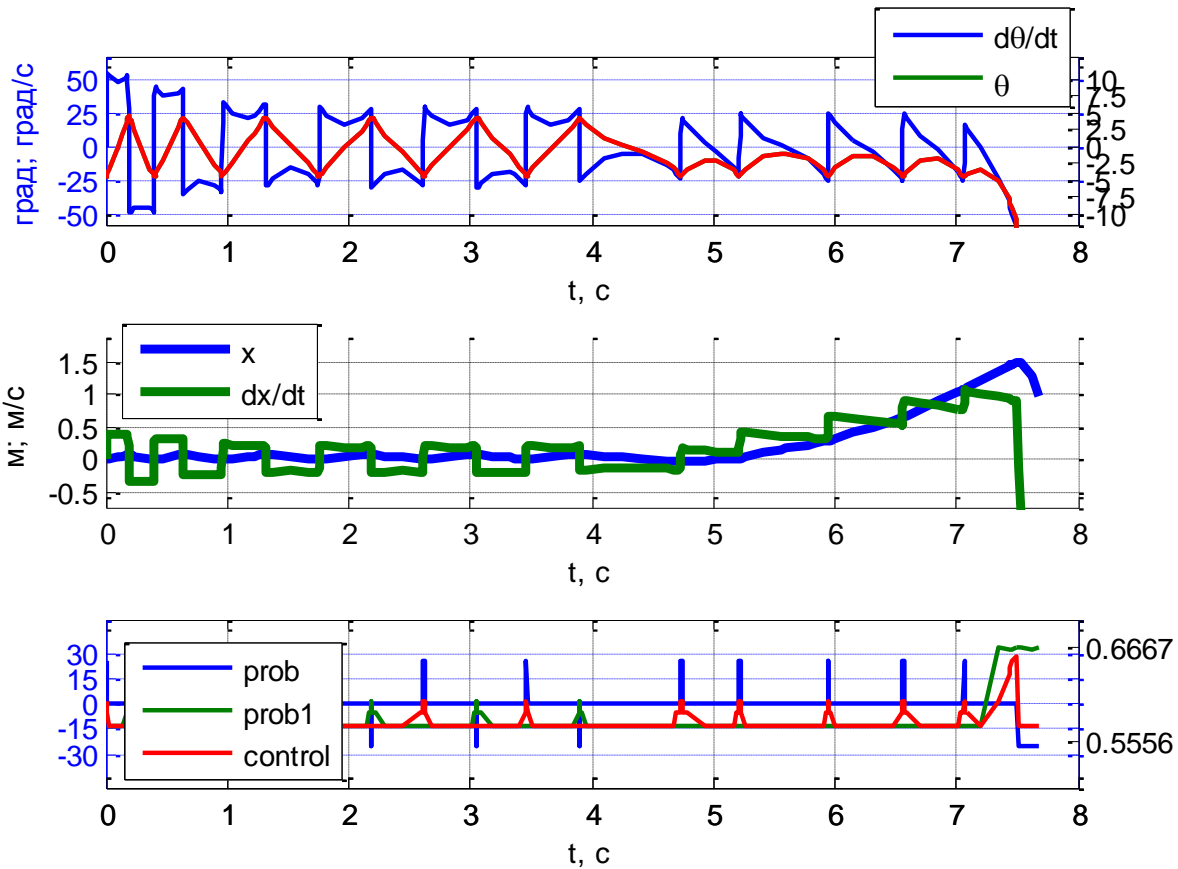
# Применение в задачах управления. Пример №3



# Применение в задачах управления. Пример №3

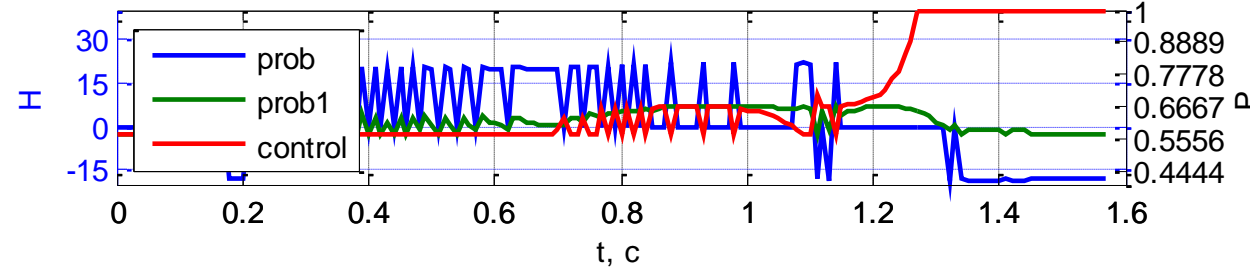
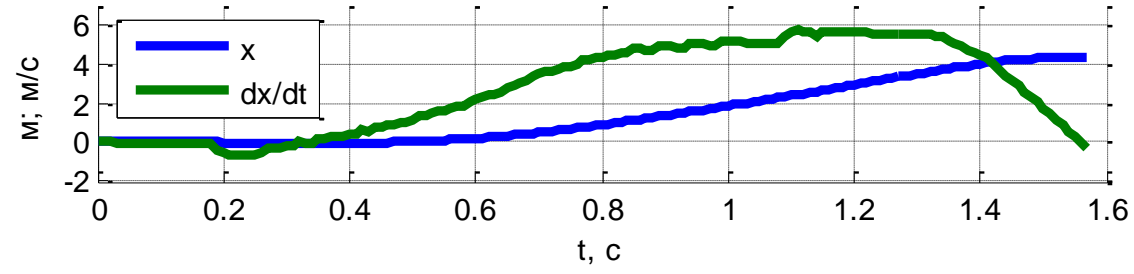
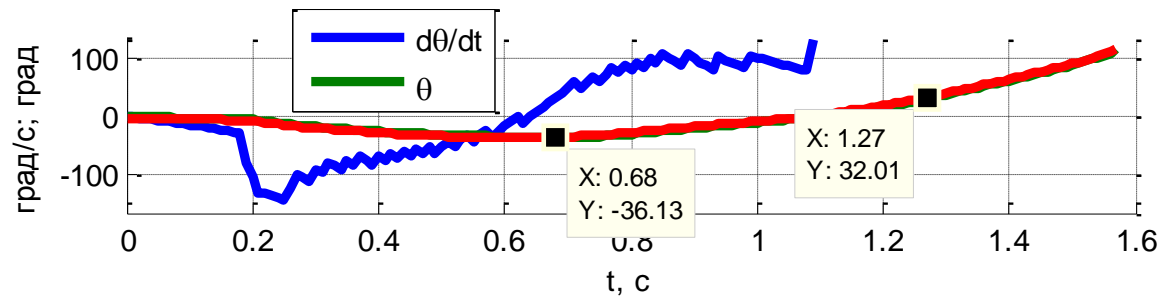


Simulink-схема системы управления перевёрнутым маятником (с нелинейным элементом типа «Люфт»). Блок прогноза и нечёткой логики



САУ с ООС (коэффициент усиления 25). Без нелинейности.  
 Параметры прогноза:  $\varepsilon = 1E-4$ ,  $\gamma = [0.3 \ 0 \ 0.3 \ 0]$

Есть примеры успешного управления этим способом до 50 секунд



САУ с ООС (нечёткий регулятор). Люфт = 5 град  
 Параметры прогноза:  $\varepsilon = 1E-4$   $E_{\gamma} = [1 \ 0 \ 1 \ 0.1]$

# Ссылки

1. Вентцель А.Д., Фрейдлин М.И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
2. CTMS Example: Modeling an Inverted Pendulum in Simu-link URL:  
<http://faculty.ksu.edu.sa/eltamaly/Documents/tutorials/Matlab/tutorial1/ctms/simulink/examples/pend/pendsim.htm>;
3. Дубовик С.А. О возможности прогноза и предотвращения критических состояний при управлении процессами диффузионного типа. XII Всероссийское совещание по проблемам управления, 2014, Москва
4. Нечаев Ю.И. Дубовик С.А. Оценка вероятности больших отклонений возмущённой динамической системы // Морские интеллектуальные технологии, 2009. №3, с.21-27
5. Липко И.Ю. Создание гибридной системы управления перевёрнутым маятником на тележке с использованием функционала действия / И.Ю. Липко // Интеллектуальные системы, управление и мехатроника – 2016 [Электронный ресурс]: Материалы междунар. науч.-техн. конф., Севастополь, 2016 г.
6. Липко И.Ю. Прогноз кризисных состояний движения судна на воздушной подушке с использованием функционала действия / И.Ю. Липко // Информационные технологии и управление, № 1, 2015 С.22-27



Иван Липко

[ivanlipko@yandex.ru](mailto:ivanlipko@yandex.ru)

Севастопольский государственный  
университет

г. Севастополь, Россия