Случайные графы, лекция 1
Введение, эволюция случайного графа

Никита Звонков

стажёр-исследователь МЛ ТИ

26.04.2024

Случайный граф

Как следует из определения, случайный граф — это случайная величина, принимающая значения на каком-то множестве графов.
Мы будем рассматривать две модели, которые позже окажутся во многом *почти* эквивалентными:

Определение

Случайный граф в биномиальной модели $G(n, p)$ *— это граф на* n *вершинах, в котором каждое из рёбер проведено независимо от других с вероятностью* p.

Определение

Случайный граф в равномерной модели $G(n, m)$ *— это граф на* n *вершинах, выбранный равновероятно из множества*

Важно заметить, что нотации не отличаются ничем кроме используемой переменной.

Замечание

Как можно заметить, $(G(n,p) \big| |E| = m) \stackrel{\mathrm{d}}{=} G(n,m)$.

Свойства графа

Определение

За $\mathcal{G}_n$ обозначим множество всех графов без петель и кратных рёбер на n вершинах.

Определение

Свойством графа $Q = (Q_1, Q_2, \dots), Q_i \subseteq \mathcal{G}_i$ называется некоторое множество графов. Если граф обладает свойством, будем писать $G \models Q$.

Определение

Назовём свойство Q возрастающим, если для любых $G' \subseteq G$ с одинаковым количеством вершин из $G' \models Q$ следует $G \models Q$. По аналогии определяются убывающие свойства. Возраставющие и убывающие свойства называются монотонными.

Связность, гамильтоновость, недвудольность — примеры монотонных свойств. Чётность числа рёбер, очевидно, немонотонно.

Свойства графа

У слушателя может возникнуть вопрос: насколько осмыслен вопрос исследования свойств случайного графа, и чем он принципиально отличается от детерминированного случая?
Оказывается, наличие некоторых свойств (например, гамильтоновости) очень легко вычислить для случайного графа с большой вероятностью, в то время как в общем случае на вопрос «гамильтонов ли граф» быстро ответить нельзя (скорее всего).
Более того, в разных ситуациях удобнее использовать разные модели случайных графов, и как писалось выше, они очень похожи.

Лемма

Пусть Q *— некоторое монотонное свойство, и задана функция* $m = m(n) \in \{0, 1, \ldots, N\}$*, где* $N = C_n^2$*, при этом* $m, N - m = \omega(1)$*. Тогда если*

$$P\left(G\left(n, \frac{m}{N}\right) \models Q\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$P\left(G\left(n, m\right) \models Q\right) \to 1 \text{ при } n \to \infty,$$

Свойства графа

Следствие

Пусть Q *— некоторое монотонное свойство, и задана функция* $m = m(n) \in \{0, 1, \ldots, N\}$, *где* $N = C_n^2$, *при этом* $m, N - m = \omega(1)$. *Тогда если*

$$P\left(G\left(n, \frac{m}{N}\right) \models Q\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то

$$P\left(G\left(n, m\right) \models Q\right) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

Получается заменой Q на его дополнение.

Пороговые вероятности

Определение

Будем говорить, что свойство Q обладает пороговой вероятностью $p(n)$, если выполнены следующие свойства:

1. *при* $\pi = o(p)$ $\mathsf{P}(G(n,\pi) \models Q) \to 0.$
2. *при* $\pi = \omega(p)$ $\mathsf{P}(G(n,\pi) \models Q) \to 1.$

Определение

Будем говорить, что свойство Q обладает точной пороговой вероятностью $p(n)$, если выполнены следующие свойства:

1. *при* $\pi = o(p)$ $\mathsf{P}(G(n,\pi) \models Q) \to 0.$
2. *при* $\pi = \omega(p)$ $\mathsf{P}(G(n,\pi) \models Q) \to 1.$

Заметим, что пороговыми вероятностями обладают не только возрастающие свойства: так, например, свойство «В графе есть ровно одна компонента связности, содержащая больше $\sqrt{n}$ вершин» немонотонно, но обладает пороговой вероятностью $1/n$ (причём точной).

Пороговые вероятности

Лемма

У любого возрастающего свойства есть пороговая вероятность.

Некоторые примеры:

- Точная пороговая вероятность связности — $\frac{\ln n}{n}$ (более того, для $p(n) = \frac{\ln n + x}{n}$ граф п.н. связен, если $x \to \infty$ и п.н. несвязен при $x \to -\infty$).
- Гамильтоновость: при $p(n) = \frac{\ln n + \ln\ln n + x}{n}$ граф п.н. гамильтонов, если $x \to \infty$ и п.н. негамильтонов при $x \to -\infty$
- Для свойства содержания какого-либо фиксированного подграфа H: за d обозначим максимальную плотность подграфов H, тогда пороговая вероятность — $p(n) = n^{-1/d}$. Плотность графа — количество рёбер, делённое на количество вершин.

Эволюция случайного графа

Рассмотрим случайный граф $G(n, p), p = c/n$.
Тогда верны следующие утверждения

1. при $c = 0$ $\mathsf{P}(G$ ацикличен$) \to 1$.
2. при $c \in (0, 1)$ граф состоит из древесных и унициклических компонент, размер которых не превосходит $O(\ln n)$.
3. при $c = 1$ в графе имеются компоненты размера $\Theta(n^{2/3})$, среди которых есть как деревья и унициклические компоненты, так и сложные.
4. при $c > 1$ п.н. имеется единственная компонента линейного размера $\beta(c) \cdot n(1 + o(1))$, в то время как размер остальных компонент не превосходит $O(\ln n)$. известно, что $\beta(c)$ — наибольший корень уравнения $e^{-\beta c} + \beta = 1$.

Фазовый переход при $c = 1$ также называется *двойным скачком*.

k-ядра

Для произвольного $k \geqslant 2$ рассмотрим максимальное множество вершин графа, что на индуцированном подграфе степень любой из них не менее k. Это множество можно получить, итеративно удаляя из графа «лёгкие» вершины (со степенью $< k$). Это множество назовём k-ядром графа.

Лемма

Для произвольных $c > 0, k \geqslant 2$ рассмотрим $\gamma_k(c)$ — наибольший корень уравнения $\gamma = \mathsf{P}(\mathrm{Pois}(\gamma c) \geqslant k)$. Если $\gamma_k(c) = 0$, то п.н. k-ядро отсутствует. В противном случае его размер равен $\alpha_k(c) \cdot n(1 + o(1))$, где

$$\alpha_k(c) = \mathsf{P}(\mathrm{Pois}(\gamma_k(c) \cdot c) \geqslant k + 1).$$