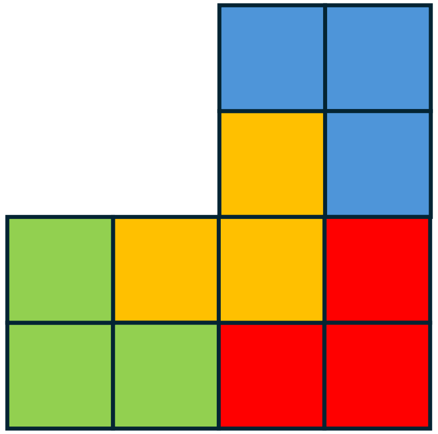
Применение SAT-солвера в задачах на разрезание на двумерной решётке

Фёдор Куянов, 4 курс ФКН

Научная школа МЛ ТИ, Вороново, 28.04.2024

Постановка задачи

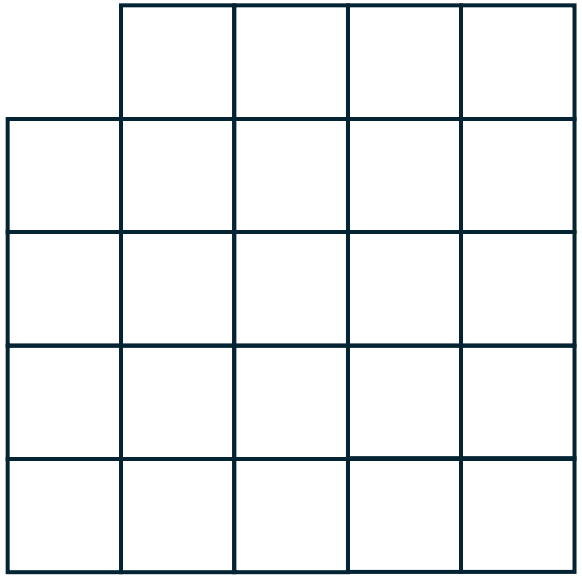
- Дана фигура, составленная из n клеток, и целое число k.
- Спрашивается, можно ли её разрезать на k равных частей по линиям сетки?
- Части считаются равными, если они совмещаются движением плоскости (параллельный перенос, поворот или симметрия)



Разрезание на 4 равные части

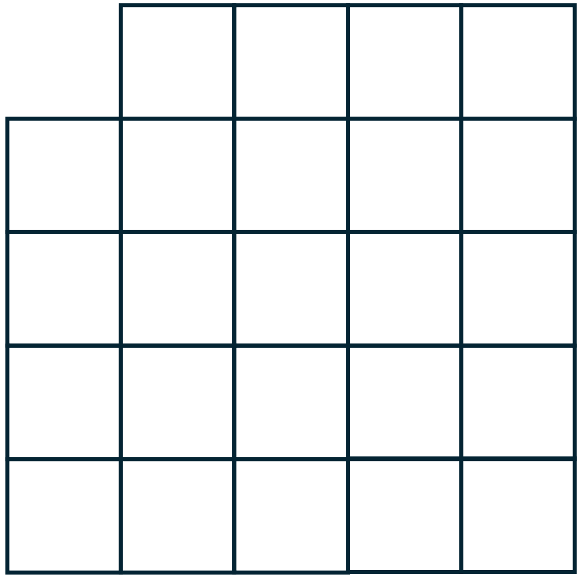
Вопрос

Можно ли разрезать данную фигуру на 2 равные части?

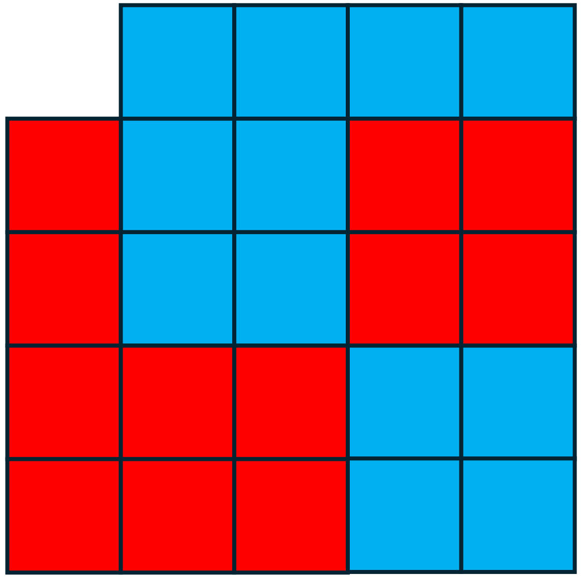


Вопрос

Можно ли разрезать данную фигуру на 2 равные части?



Да!



Случай $k = 2$

Оказывается, существует полиномиальный алгоритм, находящий разрезание на 2 равные части!

Решение.

- Переберём движение, переводящее одну часть в другую, и построим соответствующий ориентированный граф на клетках.
- У каждой вершины входящая и выходящая степень ≤ 1, т.е. граф распадается на пути и циклы (вершины со степенью < 1 не принадлежат фигуре).
- Проверяем, что нет нечётных циклов и что все пути имеют нечётную длину.

Построение КНФ

Сведём задачу на разрезание к задаче выполнимости КНФ.

У нас будет два типа переменных:

1. Отвечающие за цвет клетки ($X_{i,c}$): правда ли, что i-я ячейка покрашена в цвет c (всего – $n \times k$).
2. Отвечающие за движения между фигурами ($Y_{c,\alpha}$): правда ли, что движение α переводит часть номер 0 в часть номер c (всего – $(k-1) \times O(n)$).

Построение КНФ

1. Каждая клетка принадлежит ровно одной части:

$$\bigwedge_{i=0\dots n-1}\left(\bigwedge_{c_1\neq c_2}\left(\neg X_{i,c_1}\vee\ \neg X_{i,c_2}\right)\right)\wedge\bigvee_{c=0\dots k-1}X_{i,c}$$

2. Выбор движений корректен:

$$\bigwedge_{c=1\dots k}\bigvee_{\alpha}Y_{c,\alpha}$$

3. Часть 0 переводится в другие соответствующими движениями:

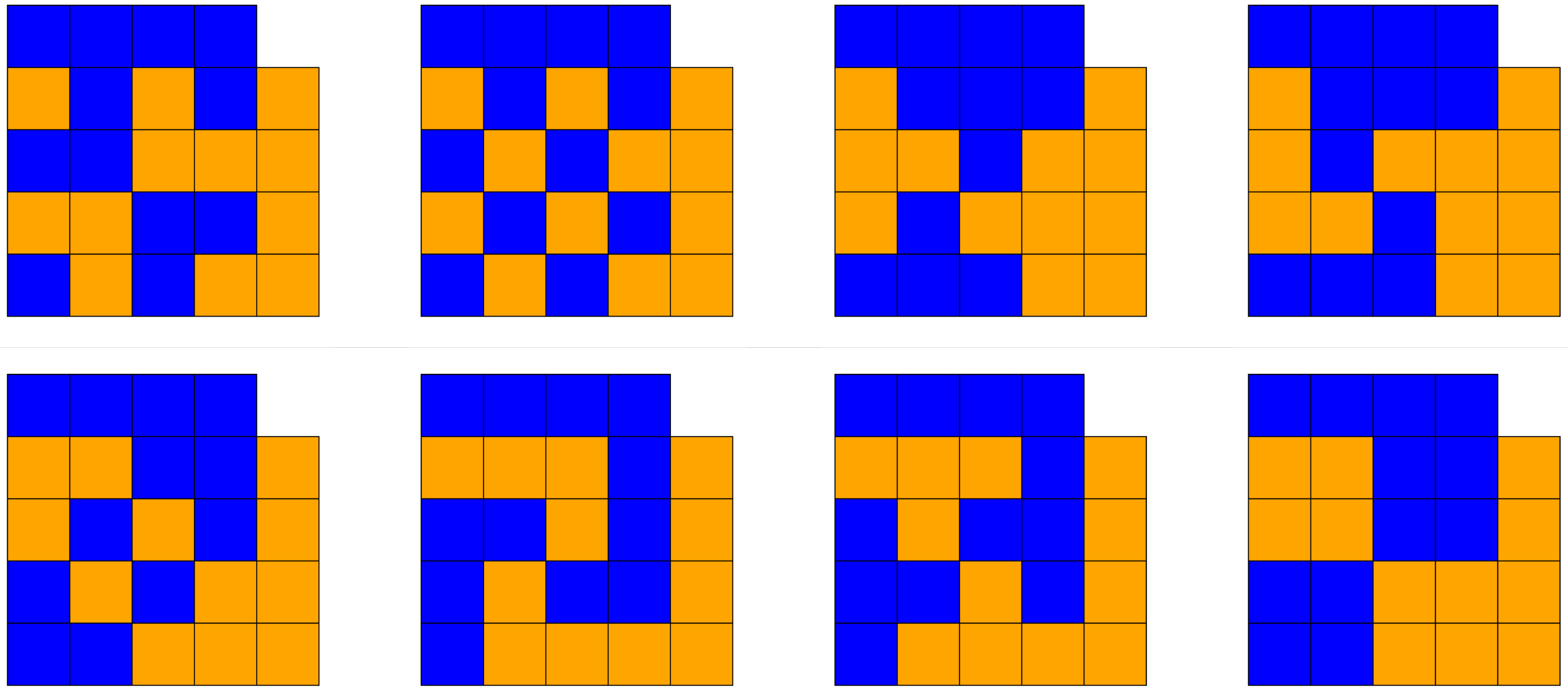
$$\bigwedge_{\alpha}\bigwedge_{i\mapsto_{\alpha}j}\bigwedge_{c=1\dots k}(\neg X_{i,0}\vee\neg Y_{c,\alpha}\vee X_{j,c})\wedge(\neg X_{j,c}\vee\neg Y_{c,\alpha}\vee X_{i,0})$$

Запуск SAT-солвера

Итак, мы переформулировали исходную задачу в терминах выполнимости КНФ.

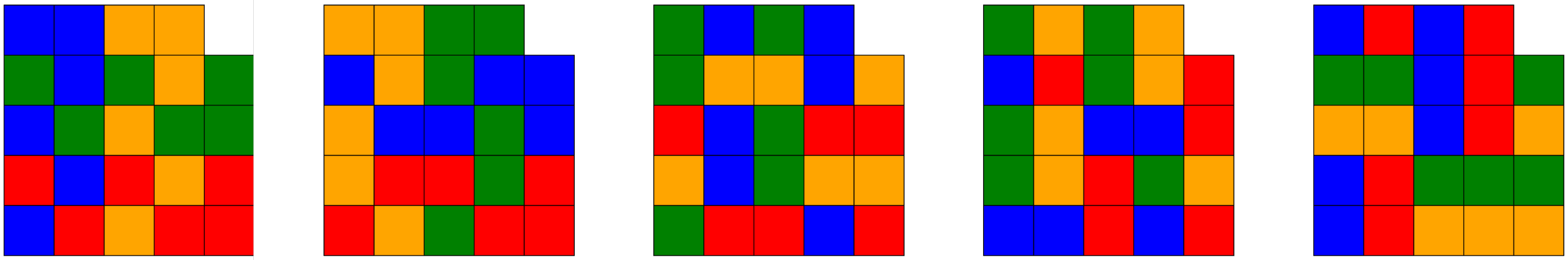
Хотя эта задача NP-полна, существуют эффективные на практике алгоритмы её решения (SAT-солверы) – полученные в результате многолетних соревнований решения таких задач на скорость. Например, можно запустить Kissat (https://fmv.jku.at/kissat): он либо выдаст подходящие значения переменных, либо докажет, что это невозможно (но последнее гораздо более трудоёмко).

Результаты

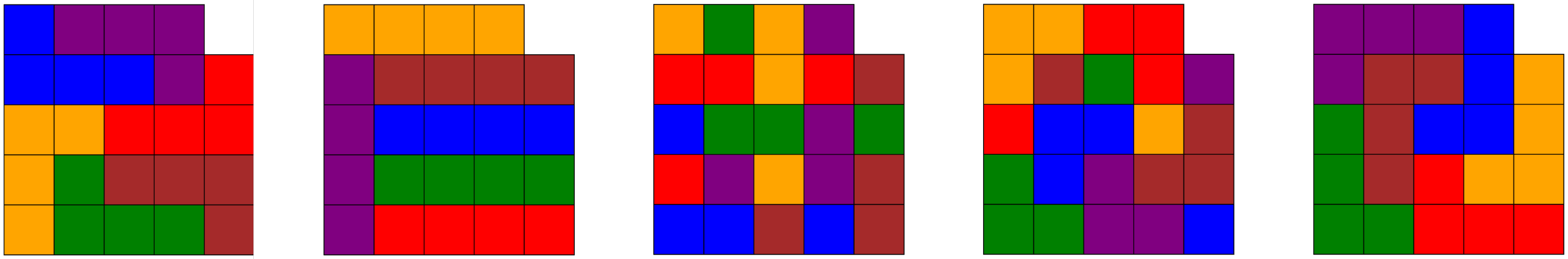


Результаты

$k = 4$:



$k = 6$:

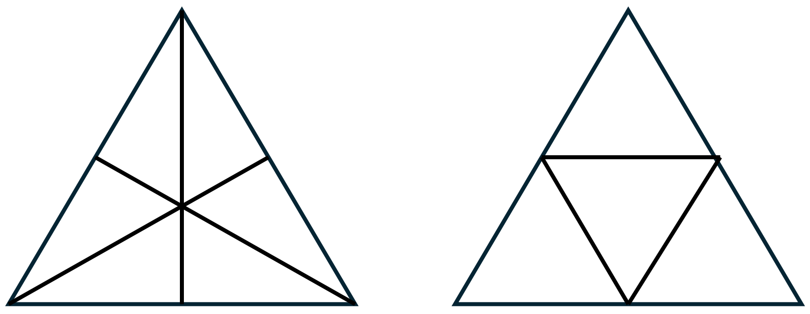


Разрезание треугольника

На сколько равных частей можно разрезать равносторонний треугольник?

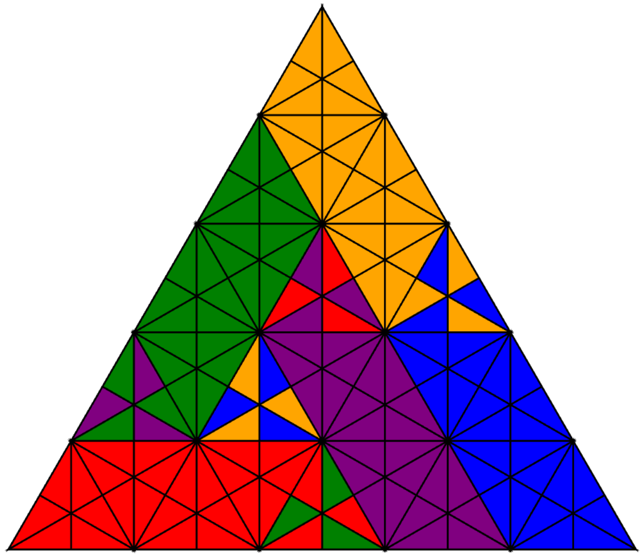
На 2, 3, 4, 6 – совсем просто.

А на 5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, …?

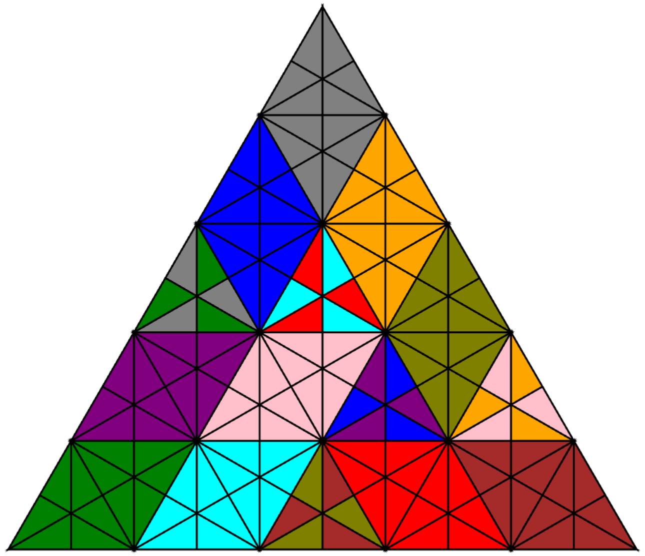


Разрезание треугольника

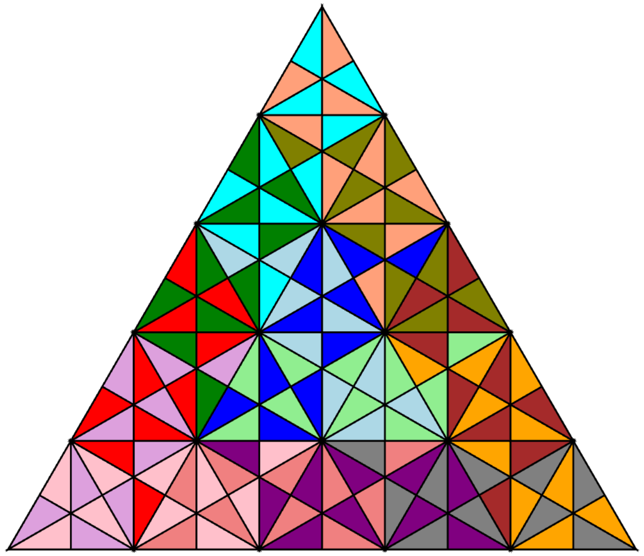
Известны разрезания треугольника на 5, 10, 15 частей:



5 частей
Михаил Патракеев, 2015



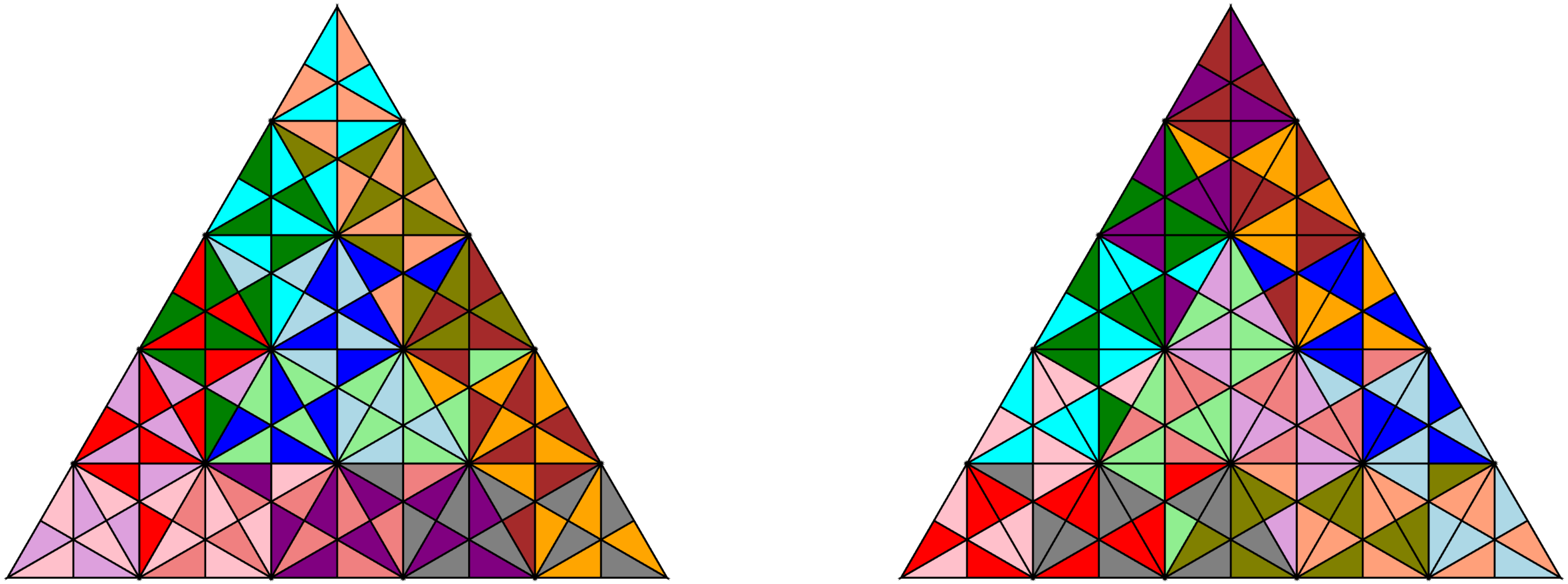
10 частей



15 частей
Павел Гузенко, 2020

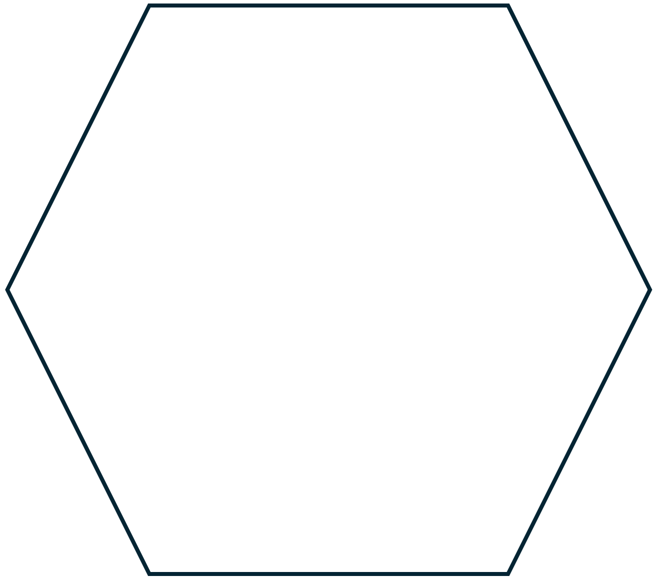
Разрезание треугольника

Был найден новый способ разрезания на 15 частей (рис. справа):



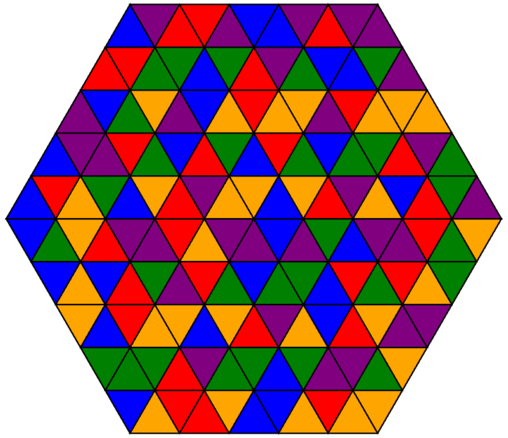
Разрезание шестиугольника

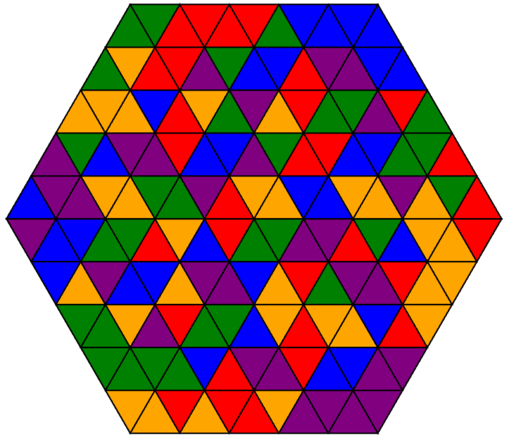
А на сколько равных частей можно разрезать правильный шестиугольник?

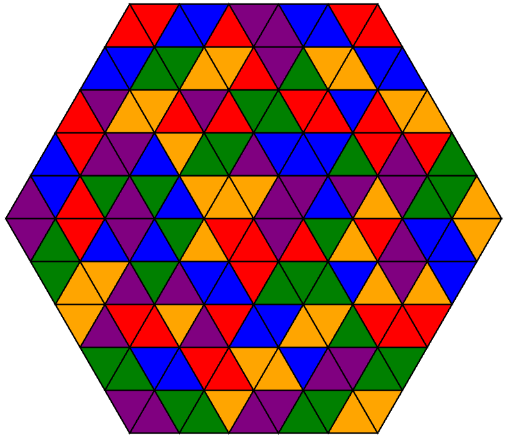


Разрезание шестиугольника

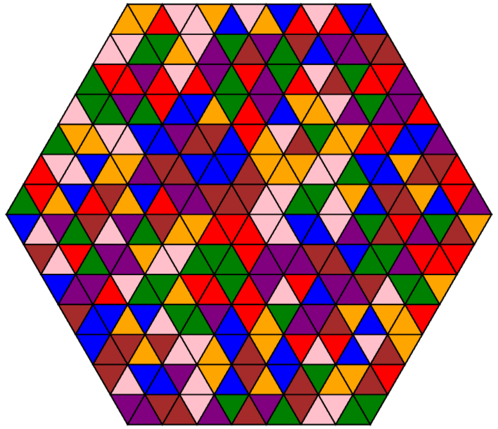
5 частей:

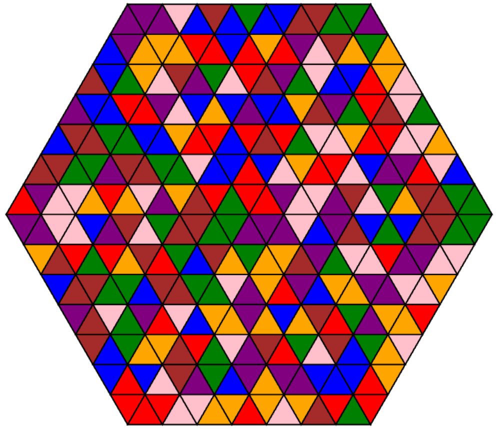


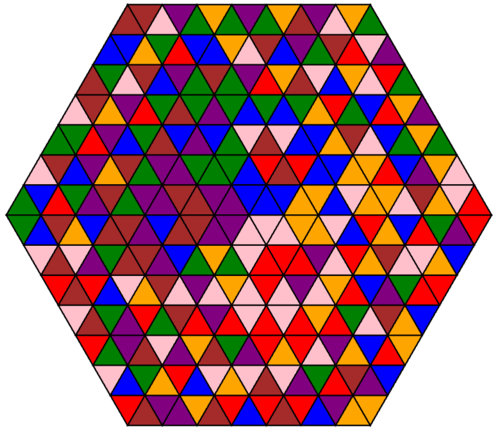


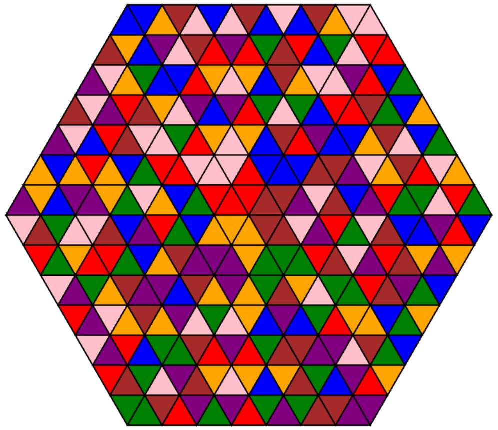


7 частей:









Ссылка на репозиторий

https://github.com/Qock-Foundation/dissect

Спасибо за внимание!