# Об автоморфизмах тотального матричного графа

Валентин Промыслов

Факультет компьютерных наук ВШЭ

Научная школа международной лаборатории теоретической информатики
27 апреля 2024 г.

# Тотальный и регулярный графы кольца матриц

**Определение**

**Тотальным графом** *кольца* $n \times n$ *матриц над полем* $\mathbb{F}$ *называется граф* $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ *с множеством вершин* $M_n(\mathbb{F})$ *такой, что различные матрицы* $A, B \in GL_n(\mathbb{F})$ *соединены ребром, если и только если* $\det(A+B)=0$.

**Регулярным графом** *кольца матриц* $\Gamma_n(\mathbb{F})$ *называется подграф* $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$, *порожденный множеством вершин* $GL_n(\mathbb{F})$.

В 2009 году математиками С. Акбари, М. Джамаали и С. Сеед Факхари было установлено, что если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, то кликовое число регулярного графа конечно:

$$\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k}^2 - n! + 1.$$

S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari. The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite, *Linear Algebra and its Applications*, 431 (2009) 1715–1718.

# Тотальный и регулярный графы кольца матриц

## Определение

**Тотальным графом** *кольца* $n \times n$ *матриц над полем* $\mathbb{F}$ *называется граф* $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ *с множеством вершин* $M_n(\mathbb{F})$ *такой, что различные матрицы* $A, B \in GL_n(\mathbb{F})$ *соединены ребром, если и только если* $\det(A + B) = 0$.
**Регулярным графом** *кольца матриц* $\Gamma_n(\mathbb{F})$ *называется подграф* $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$, *порожденный множеством вершин* $GL_n(\mathbb{F})$.

В 2009 году математиками С. Акбари, М. Джамаали и С. Сеед Факхари было установлено, что если характеристика поля $\mathbb{F}$ не равна 2, то кликовое число регулярного графа конечно:

$$\omega(\Gamma_n(\mathbb{F})) \leqslant \sum_{k=0}^{n} k! \binom{n}{k}^2 - n! + 1.$$


S. Akbari, M. Jamaali, S.A. Seyed Fakhari. The clique numbers of regular graphs of matrix algebras are finite, *Linear Algebra and its Applications*, 431 (2009) 1715–1718.

# Автоморфизмы тотального графа

## Определение

*Пусть* $G = (V, E)$ *— граф. Автоморфизм графа* $G$ *— биекция* $T\colon V \to V$ *такая, что*

$$\{v_1, v_2\} \in E \quad \Longleftrightarrow \quad \{T(v_1), T(v_2)\} \in E.$$

Таким образом, автоморфизм тотального графа $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ — это биекция $T\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, удовлетворяющая условию: для различных $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

$$\det(A + B) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \det(T(A) + T(B)) = 0.$$

# Автоморфизмы тотального графа — случай 2 x 2

Zhou, J., Wong, D., Ma, X., Automorphism group of the total graph over a matrix ring, Linear and Multilinear Algebra 2017.

**Теорема (Джоу–Вонг–Ма, 2017)**

*При $n = 2$ произвольный автоморфизм $T$ графа $\mathcal{T}_2(\mathbb{F}_q)$ для конечного поля $\mathbb{F}_q$ имеет вид:*

- *при* $\operatorname{char} \mathbb{F}_q \neq 2$

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ \sigma(c) & \sigma(d) \end{pmatrix} Q \quad \text{или} \quad T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(c) \\ \sigma(b) & \sigma(d) \end{pmatrix} Q,$$

- *при* $\operatorname{char} \mathbb{F}_q = 2$

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ \sigma(c) & \sigma(d) \end{pmatrix} Q + X \quad \text{или} \quad T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = P\begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(c) \\ \sigma(b) & \sigma(d) \end{pmatrix} Q + X,$$

*где $P, Q \in GL_2(\mathbb{F}_q)$, $X \in M_2(\mathbb{F}_q)$, а $\sigma$ — автоморфизм поля $\mathbb{F}_q$.*

# Гипотеза

**Гипотеза**

*Если* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, *то любой автоморфизм* $T$ *графа* $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ *при* $n \geqslant 2$ *имеет вид:*

$$T(A) = PA^{\sigma}Q \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F})$$

*или*

$$T(A) = P(A^t)^{\sigma}Q \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F}),$$

*где* $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$, *а* $\sigma$ *— автоморфизм поля* $\mathbb{F}$ *(под* $A^{\sigma}$ *понимается поэлементное применение* $\sigma$ *к элементам матрицы* $A$*).*

# ~~Гипотеза~~ Теорема

**Теорема**

*Если* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, *то любой автоморфизм* $T$ *графа* $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ *при* $n \geqslant 2$ *имеет вид:*

$$T(A) = PA^{\sigma}Q \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F})$$

*или*

$$T(A) = P(A^t)^{\sigma}Q \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F}),$$

*где* $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$, *а* $\sigma$ *— автоморфизм поля* $\mathbb{F}$*.*

# Идея доказательства

## Отображения, сохраняющие вырожденность суммы

**Теорема (Гутарман–Костара–Максаев–П., 2023)**

*Пусть* $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$ *и* $\varphi \colon M_n \to M_n$ *— такое биективное отображение, что для любых двух матриц* $A, B \in M_n$ *выполнено условие*

$$A + B \ \text{ вырождена} \iff \varphi(A) + \varphi(B) \ \text{ вырождена.}$$

*Тогда найдутся невырожденные матрицы* $P, Q \in M_n$ *такие, что либо*

$$\varphi(A) = P A^{\tau} Q, \quad (A \in M_n),$$

*либо*

$$\varphi(A) = P (A^{\tau})^t Q, \quad (A \in M_n),$$

*для некоторого автоморфизма* $\tau$ *поля* $\mathbb{F}$.

# Идея доказательства
## Теорема Хуа

L.K. Hua, A theorem on matrices over a sfield and its applications, J. Chinese Math. Soc. (N.S) 1951.

**Теорема (Хуа, 1951)**

*Пусть* $\varphi\colon M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, $n \geqslant 2$, *такая биекция, что для всех* $A, B \in M_n(\mathbb{F})$,

$$\mathrm{rk}(A - B) = 1 \iff \mathrm{rk}(\varphi(A) - \varphi(B)) = 1.$$

*Тогда найдутся такие* $P, Q \in GL_n$, $R \in M_n(\mathbb{F})$ *и* $\tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{F})$, *что*

$$\varphi(A) = PA^{\tau}Q + R, \quad A \in M_n(\mathbb{F}),$$

*или*

$$\varphi(A) = P(A^{\tau})^{t}Q + R, \quad A \in M_n(\mathbb{F}).$$

# Идея доказательства

## Множество общих соседей

- Для $Y \in M_n$ обозначим через $\mathcal{N}(Y) = \{S \in M_n \mid \det(S + Y) = 0\}$.
- Для непустого множества $\mathcal{Y} \subseteq M_n$, обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{Y}) = \bigcap\limits_{Y \in \mathcal{Y}} \mathcal{N}(Y)$.
- Для различных $A, B \in M_n$ обозначим через $\ell(A, B)$ прямую в $M_n$, проходящую через $A$ и $B$, т. е., $\ell(A, B) = \{A + \mu(B - A) \mid \mu \in \mathbb{F}\}$.

**Лемма**

*Пусть $A, B \in M_n$ различны. Тогда*

$$\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\})) = \begin{cases} \{A, B\}, & \text{если } \operatorname{rk}(A - B) \geqslant 2; \\ \ell(A, B), & \text{если } \operatorname{rk}(A - B) = 1. \end{cases}$$

# Доказательство

## Множество общих соседей

### Предложение

*Пусть* $V$ *векторное пространство над* $\mathbb{F}$, *и* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \colon V \to V$ *линейные операторы такие, что ленейная независимость* $\{x, y\} \subseteq V$ *влечет линейную зависимость* $\{\mathcal{A}x, \mathcal{B}y\}$. *Тогда или* $\mathcal{A} = 0$, *или* $\mathcal{B} = 0$, *или* $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{B}$ *и является подпространством размерности* $1$.

**H. Havlicek, P. Šemrl, From geometry to invertibility preservers, Studia Math., 174 (2006), pp. 99–109.**

### Лемма

*Пусть* $A, B \in M_n$ *две различные матрицы, и пусть* $X \in \mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A, B\}))$. *Тогда для всех линейно независимых векторов* $x, y \in \mathbb{F}^n$, *векторы* $(A - X)x$ *и* $(B - X)y$ *линейно зависимы* $\mathbb{F}^n$.

### Лемма

*Пусть* $A, B \in M_n$ *различны. Тогда*

$$\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A,B\})) = \{A,B\}, \quad \textit{если } \operatorname{rk}(A-B) \geqslant 2;$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{N}(\{A,B\})) \supseteq \ell(A,B), \quad \textit{если } \operatorname{rk}(A-B) = 1.$$

# Доказательство

## Отображения, сохраняющие вырожденность суммы

**Теорема (Гутарман–Костара–Максаев–П., 2023)**

*Пусть* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$ *и* $\varphi\colon M_n \to M_n$ *— такое биективное отображение, что для любых двух матриц* $A, B \in M_n$ *выполнено условие*

$$A + B \ \text{ вырождена} \iff \varphi(A) + \varphi(B) \ \text{ вырождена.}$$

*Тогда найдутся невырожденные матрицы* $P, Q \in M_n$ *такие, что либо*

$$\varphi(A) = PA^{\tau}Q, \quad (A \in M_n),$$

*либо*

$$\varphi(A) = P(A^{\tau})^{t}Q, \quad (A \in M_n),$$

*для некоторого автоморфизма* $\tau$ *поля* $\mathbb{F}$*.*

# Доказательство

## Сохраннение невырожденных матриц — конечный случай

### Утверждение

*Условие* $T(O) = O$ *влечет* $T(\Omega_n) = \Omega_n$.

### Предложение

*Пусть* $\mathbb{F}$ *конечно,* $A \in M_n$. *Тогда*

$$\deg A = \begin{cases} |\Omega_n|, & \text{если } A \in GL_n, \\ |\Omega_n| - 1, & \text{если } A \in \Omega_n. \end{cases}$$

# Доказательство

## Сохраннение невырожденных матриц — бесконечный случай

### Предложение

*Пусть $\mathbb{F}$ бесконечно. Тогда:*

1. *в любой бесконечной клике $\mathcal{W}$ лишь конечное число вершин не является соседями $O$.*
2. *для каждой $O \neq A \in M_n$ найдется такая бесконечная клика $\mathcal{W}$ в $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$, что из нее не идет ни одного ребра в $A$.*

### Следствие

$T(GL_n) = GL_n$ и $T(\Omega_n) = \Omega_n$.

### Теорема (Гутарман–Костара–Максаев–П., 2023)

*Если* $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, *то любой автоморфизм* $T$ *графа* $\mathcal{T}_n(\mathbb{F})$ *при* $n \geqslant 2$ *имеет вид:*

$$T(A) = PA^{\sigma}Q \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F})$$

*или*

$$T(A) = P(A^t)^{\sigma}Q \quad \text{для всех } A \in M_n(\mathbb{F}),$$

*где* $P, Q \in GL_n(\mathbb{F})$, *а* $\sigma$ *— автоморфизм поля* $\mathbb{F}$.